

CERCETARI PRIVIND CALCULUL ANALITIC AL MOMENTULUI DE INERTIE AL VOLANTULUI

Ion FLOREA, Nicolae GRIGORE, Stefan MINOIU

Universitatea Petro-Gaze din Ploiesti, e-mail i_f_00@Yahoo.com

Abstract: The paper presents for the beginning the principal calculus for the flywheel moment of inertia. Afterwards it is presented the mathematical fundamentals for replacing the graphic method by elements of electronic calculus. This is referring to the calculus of the distance between a curve and a strait line with a known slope.

1. CONSIDERATII TEORETICE

Volantul este un organ de masina de forma unui disc plin sau a unei roti cu obada aflat în miscare de rotatie. Acesta are rolul de a înmagazina energie atunci când momentul redus motor este mai mare decât momentul redus rezistent ($M_{red}^m > M_{red}^r$) si de a o ceda mecanismului atunci când $M_{red}^r > M_{red}^m$. Necesitatea montarii volantului apare ca urmare a modificarii valorii nominale a vitezei unghiulare a elementului conducator. Aceasta se produce datorita variatiei în timp a marimilor de sinteza M_{red} (momentul redus), F_{red} (forța redusa), J_{red} (momentul de inertie redus) si m_{red} (masa redusa). Neuniformitatea functionarii elementului conducator se exprima cu ajutorul gradului de neregularitate d dat de relatia

$$d = \frac{w_{max} - w_{min}}{w_{med}} \quad (1)$$

unde w_{max} , w_{min} si w_{med} sunt vitezele unghiulare maxima, minima respectiv medie ale elementului conducator. Se admite ca viteza unghiulara medie este egala cu viteza unghiulara nominala, $w_{med} = w_n = w_1$.

Valoarea momentului de inertie al volantului (J_v) necesara pentru a asigura un grad de neregularitate optim pentru functionarea unui mecanism sau masina depinde de w_n si d .

Dintre metodele de calcul ale lui J_v se pot aminti : metodele Wittenbauer, Gutiar, Artobolevski, Radinger si metoda aproximativa.

În cadrul metodei Wittenbauer se utilizeaza diagrama $\Delta E_c(J_{red})$ unde prin ΔE_c s-a notat variatia energiei cinetice a mecanismului pe un ciclu cinematic (fig.1). Pentru calculul momentului de inertie al volantului, J_v , pe lângă trasarea diagramei $\Delta E_c(J_{red})$ mai trebuiesc calculate pantele dreptelor tangente la curba, cu relatiile :

$$\operatorname{tg} \Psi_{max} = \frac{1}{2} \cdot w_{med}^2 \cdot \frac{k_J}{k_E} \cdot (1+d) \quad \operatorname{tg} \Psi_{min} = \frac{1}{2} \cdot w_{med}^2 \cdot \frac{k_J}{k_E} \cdot (1-d) \quad (2)$$

unde k_J si k_E sunt scarile de reprezentare ale momentului de inertie redus si ale energiei cinetice. Se masoara segmentele (ab) sau (AB) si, în functie de marimea acestora, se poate calcula valoarea momentului de inertie al volantului, J_v cu relatiile :

$$J_v = \frac{k_E \cdot (ab)}{d \cdot w_{med}^2} \quad \text{sau} \quad J_v = \frac{k_E \cdot (MN)}{d \cdot w_{med}^2} \quad (3)$$

unde : $(MN) = (OB) \cdot \operatorname{tg} \Psi_{\max} - (OA) \cdot \operatorname{tg} \Psi_{\min}$.

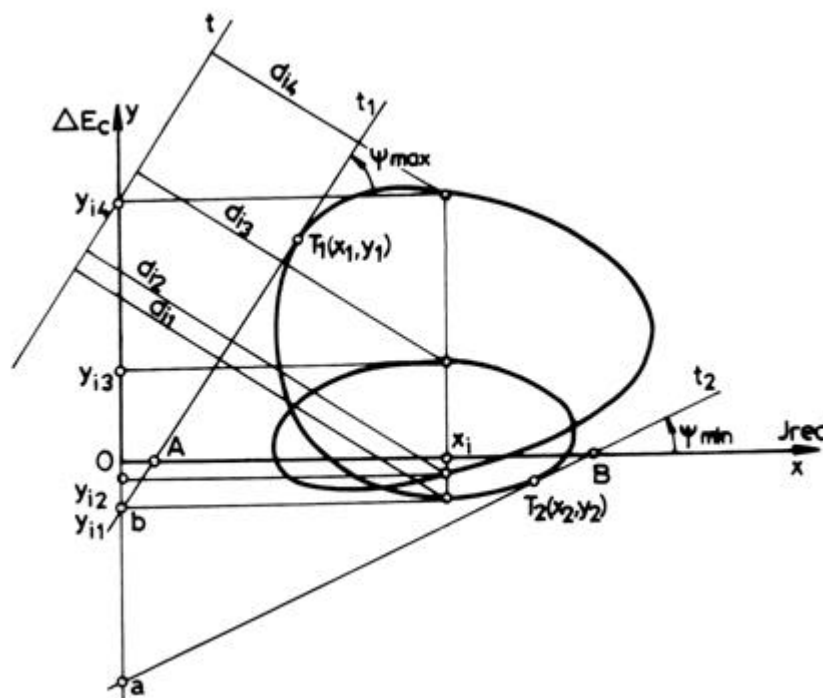


Fig.1. Modul de calcul al momentului de inertie al volantului

Lucrarea expune principiul matematic prin intermediul caruia se evita reprezentarea punct cu punct a graficului $\Delta E_c(J_{red})$ și măsurarea pe desen a lungimii segmentelor (ab) sau (AB) . În acest scop se utilizează calculatorul pentru calculul simbolic sau numeric și reprezentarea grafică a rezultatelor.

Fie funcția $y = f(x) = \Delta E_c(J_{red})$ și funcția liniară $y = m \cdot x + n$ ce reprezintă dreapta t de panta $m = \operatorname{tg} \Psi_{\max}$ și parametrul n . Pentru ca dreapta t să nu intersecteze graficul funcției $\Delta E_c(J_{red})$ se alege arbitrar $n \geq \Delta E_c$. Se pune ecuația dreptei t sub forma $m \cdot x - y + n = 0$, adică una din formele canonice ale dreptei, respectiv $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$. Pentru o valoare a abscisei $x_i = J_{red}$ se obțin mai multe valori ale ordonatei $y_i \in \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$. Distanța d_i de la un punct de coordonate (x_i, y_i) la dreapta t de ecuație $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$ se calculează cu relația:

$$d_i = \frac{|a \cdot x_i + b \cdot y_i + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (4)$$

Se obțin mai multe distanțe d_i corespunzătoare punctului de abscisa x . Se reține doar valoarea minimă, în fig.1, d_4 . Parcurgând $x_i \in \{0, J_{red, \max}\}$ se obține curba $d_{i, \min}(x_i)$. Valoarea de minim absolut pentru d_i corespunde punctului de tangență $T_1(x_1, y_1)$ în care se construiește dreapta t_1 tangență la graficul $\Delta E_c(J_{red})$ și care are ecuația $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$. Analog se obține dreapta t_2 de ecuație $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$. Intersectând aceste drepte cu axa Ox se obțin punctele de abscisa $A(x_A, 0)$ și $B(x_B, 0)$. Se poate determina astfel lungimea segmentului AB în mărime reală ca fiind $AB = x_B - x_A$. Din acest

moment sunt cunoscute toate elementele pentru a putea fi calculat momentul de inertie al volantului.

2.STUDIUL DE CAZ

In continuare este prezentat un studiu de caz pe mecanismul din fig. 2 .

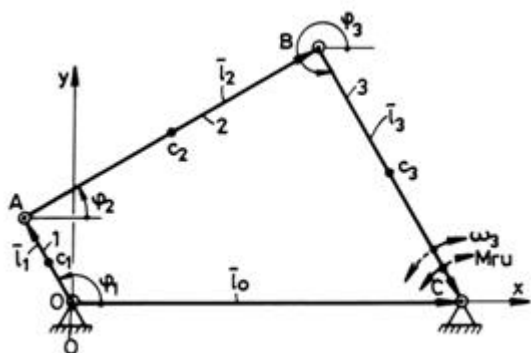


Fig.2. Mecanism patrulater pentru exemplificare

Se cunosc :

-lungimile elementelor cinematice :

$$l_1 = 0,2m; \quad l_2 = 0,7m; \quad l_3 = 0,6m;$$

$$l_0 = 0,8m;$$

-masele elementelor cinematice :

$$m_1=3kg; \quad m_2=6kg; \quad m_3=5kg;$$

-fortele de greutate ale elementelor cinematice :

$$G_1=29,4kg; \quad G_2=58,8N; \quad G_3=49N;$$

-momentele de inertie masice ale

elementelor cinematice :

$$J_{c1}=0,01kgm^2; \quad J_{c2}=0,245kgm^2;$$

$$J_{c3}=0,15kgm^2;$$

-momentul rezistent util aplicat elementului de executie: $M_{ru}=500N$;

Utilizând metoda conturului vectorial închis în studiul cinematicii mecanismului considerat se scrie relatia:

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 + \vec{l}_3 = \vec{l}_0 \quad (5)$$

Tinând seama de proiectiile relatiei (5) pe axele de coordonate, se fac notatiile:

$$a_3(j_1) = 2 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \sin(j_1) \quad b_3(j_1) = 2 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \cos(j_1) - 2 \cdot l_0 \cdot l_3; \quad (6)$$

$$c_3(j_1) = 2 \cdot l_1 \cdot l_0 \cdot \cos(j_1) + l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_0^2$$

Expresiile unghiurilor vectorilor conturului sunt date de relatiile:

$$j_2(j_1) = -\arctan\left(\frac{b_2(j_1)}{a_2(j_1)}\right) + (-1)^{k_1} \cdot \arcsin\left[\frac{(-1)^{k_1} \cdot c_2(j_1)}{\sqrt{(a_2(j_1))^2 + (b_2(j_1))^2}}\right] + k_1 \cdot p \quad (7)$$

$$j_3(j_1) = -\arctan\left(\frac{b_3(j_1)}{a_3(j_1)}\right) + (-1)^{k_2} \cdot \arcsin\left[\frac{(-1)^{k_2} \cdot c_3(j_1)}{\sqrt{(a_3(j_1))^2 + (b_3(j_1))^2}}\right] + k_2 \cdot p$$

In continuare se prezinta relatiile de calcul ale vitezelor unghiulare si modul de calcul al vitezei unui centru de masa, C_3 :

$$w_2(j_1) = w_1 \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\sin(j_3(j_1) - j_1)}{\sin(j_2(j_1) - j_3(j_1))}; \quad (8)$$

$$w_3(j_1) = w_1 \cdot \frac{l_1}{l_3} \cdot \frac{\sin(j_2(j_1) - j_1)}{\sin(j_3(j_1) - j_2(j_1))};$$

$$v_{x_{c3}}(j_1) = -l_1 \cdot w_1 \cdot \sin(j_1) - l_2 \cdot w_2(j_1) \cdot \sin(j_2(j_1)) - \frac{1}{2} \cdot l_3 \cdot w_3(j_1) \cdot \sin(j_3(j_1));$$

$$v_{y_{c3}}(j_1) = l_1 \cdot w_1 \cdot \cos(j_1) + l_2 \cdot w_2(j_1) \cdot \cos(j_2(j_1)) + \frac{1}{2} \cdot l_3 \cdot w_3(j_1) \cdot \cos(j_3(j_1));$$

$$v_{c3}(j_1) = \sqrt{(v_{x_{c3}}(j_1))^2 + (v_{y_{c3}}(j_1))^2}$$

Plecând de la conditia ca lucrul mecanic motor sa fie egal cu lucrul mecanic rezistent pe un ciclu cinematic si tinând seama de relatiile de lucru de la momentul redus, se poate scrie succesiv:

$$L_m=L_r ; L_m = \oint_{\Phi_c} M_{red}^m(j_1) \cdot dj_1 ; L_r = \oint_{\Phi_c} M_{red}^r(j_1) \cdot dj_1 ; \quad (9)$$

$$\oint_{\Phi_c} (M_{red}^m(j_1) - M_{red}^r(j_1)) \cdot dj_1 = \oint_{\Phi_c} M_{red}(j_1) \cdot dj_1 = 0 ; \bar{M}_{red} \cdot \bar{w}_1 = \sum \bar{M}_j \cdot \bar{w}_j + \sum \bar{F}_j \cdot \bar{v}_{cj}$$

$$L_m = \oint_{\Phi_c} M_m \cdot dj_1 = \oint_{\Phi_c} M_{red}^*(j_1) \cdot dj_1 =$$

$$\oint_{\Phi_c} \frac{1}{w_1} (|M_{ru} \cdot w_3(j_1)| + G_1 \cdot v_{c1}(j_1) + G_2 \cdot v_{c2}(j_1) + G_3 \cdot v_{c3}(j_1)) \cdot dj_1 ;$$

$$M_m = \frac{L_m}{2 \cdot p} \quad (10)$$

Având momentul motor determinat se calculeaza în continuare momentul redus, $M_{red}(j_1)$ momentul de inertie redus, $J_{red}(j_1)$ precum si variatia energiei cinetice, $\Delta E_c(j_1)$.

$$M_{red}(j_1) = M_m - M_{red}^*(j_1) ; \quad (11)$$

$$\Delta E_c(j_1) = \int M_{red}(j_1) \cdot dj_1 \quad (12)$$

$$J_{red}(j_1) = \frac{1}{w_1^2} \cdot (m_1 \cdot v_{c1}^2(j_1) + m_2 \cdot v_{c2}^2(j_1) + m_3 \cdot v_{c3}^2(j_1) + J_{c1} \cdot w_1^2 + J_{c2} \cdot w_2^2(j_1) + J_{c3} \cdot w_3^2(j_1))$$

Utilizând mediul MathCAD se poate calcula si trasa diagrama $\Delta E_c(J_{red}(j_1))$.

In continuare sunt prezentate diagramele si valorile numerice obtinute pe baza relatiilor (5)...(12).

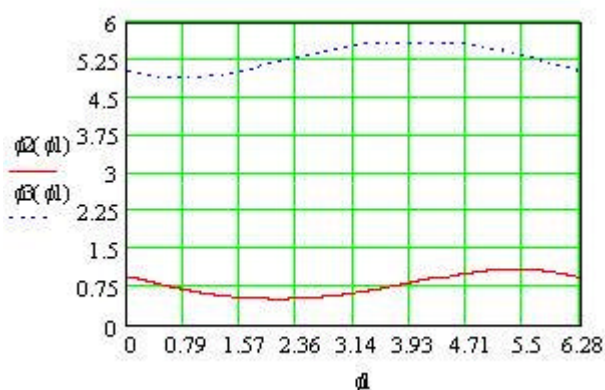


Fig.3. Variatia unghiurilor vectorilor din conturul poligonal

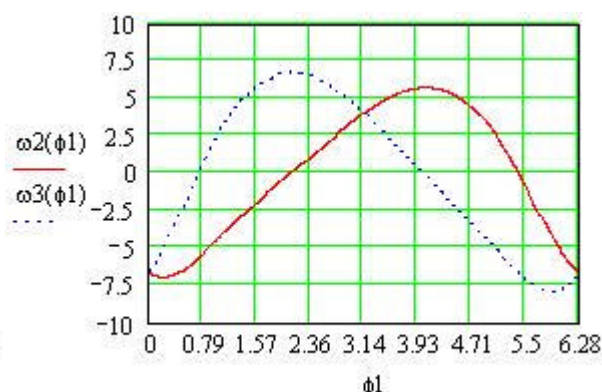


Fig.4. Variatia vitezelor unghiulare

In fig.3. si fig.4. unghiurile sunt exprimate în radiani iar vitezele unghiulare în s^{-1} . Din considerente de simplificare a notatiilor în MathCAD se face precizarea ca $f_i = j_i$ si $w_i = w_i$.

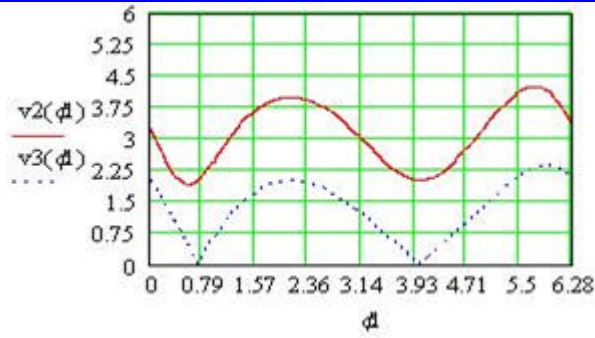


Fig.5. Variatia vitezelor centrelor de masa

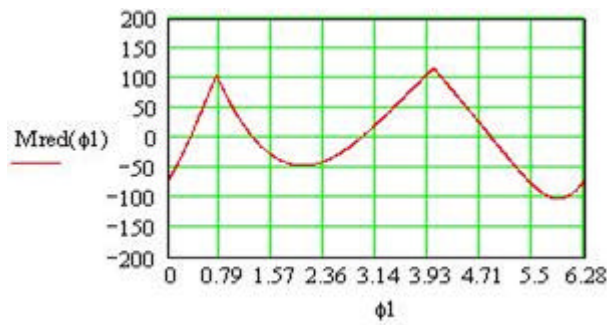


Fig.6. Variatia momentului redus

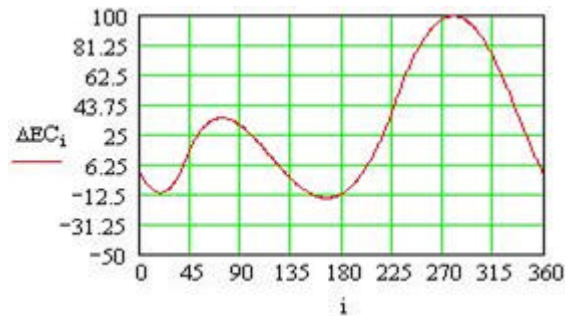


Fig.7. Variatia energiei cinetice pe un ciclu cinematic

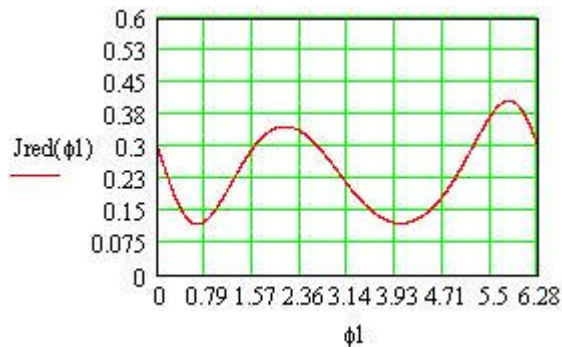


Fig.8. Variatia momentului de inertie redus

Pentru figurile 5...8 se fac urmatoarele precizari:

- în fig.5, $v_i(f_1) = v_{Ci}(j_1)$ [m/s], $f_1 = j_1$ [rad];
- în fig.6, $M_{red}(f_1) = M_{red}(j_1)$ [Nm], $f_1 = j_1$ [rad];
- în fig.7, $\Delta E_{Ci} = \Delta E_C$ [Nm], $i = j_1$, [rad];
- în fig.8, $J_{red}(f_1) = J_{red}(j_1)$, $f_1 = j_1$ [rad].

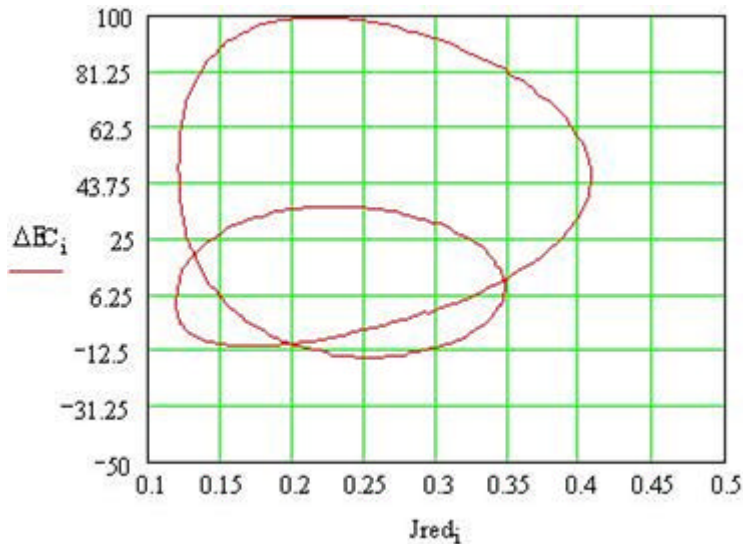


Fig.8. Variatia energiei cinetice în functie de momentul de inertie redus

Pe baza relatiilor stabilite mai sus s-au obtinut urmatoarele valori:

- pentru lucrul mecanic motor, $L_m=696,882$ Nm;
- pentru momentul motorului de actionare, $M_m=110,912$ Nm;
- pentru momentul de inertie al volantului, $J_v=3,129$ kgm², considerând $d = 0,1$.

Bibliografie

1. PANAIT, GH. , SAVA, M. , FLOREA I. - *Teoria mecanismelor si masinilor*. Editura UNIVERSAL CARTFIL, Ploiesti, 1998.
2. FLOREA I. – *Cercetari privind fiabilitatea sapelor de foraj*. Universitatea Transilvania din Brasov, 2002, *Teza de doctorat*.