

O ALTA ABORDARE A CALCULULUI ANALITIC AL MOMENTULUI DE INERTIE AL VOLANTULUI

Ion FLOREA, Nicolae GRIGORE, Adrian CREITARU

Universitatea Petro-Gaze din Ploiesti, e-mail i_f_00@Yahoo.com

Abstract: The paper presents for the beginning the principal calculus for the flywheel moment of inertia. Afterwards it is presented the mathematical fundamentals for replacing the graphic method by elements of electronic calculus. It uses the well known thing from mathematics that, in a tangential point of two graphics, the function built as the difference and its derivation become noughts.

1. CONSIDERATII TEORETICE

In timpul functionarii masinilor si mecanismelor viteza unghiulara a elementului conducator a unui mecanism cu element conducator în miscare de rotatie, pe un ciclu cinematic, nu este constanta. Variatia vitezei unghiulare în faza de regim este determinata de variatia marimilor de sinteza M_{red} (momentul redus), F_{red} (fora redusa), J_{red} (momentul de inertie redus) si m_{red} (masa redusa). In general acestea sunt functii de f , ω si t . Variatia vitezei unghiulare în timpul unui ciclu cinematic este scoasa în evidenta prin notiunea de grad de neuniformitate, d , care este definit de relatia :

$$d = \frac{w_{max} - w_{min}}{w_{med}} \quad (1)$$

unde w_{max} , w_{min} si w_{med} sunt vitezele unghiulare maxima, minima respectiv medie ale elementului conducator. Se admite ca viteza unghiulara medie este egala cu viteza unghiulara nominala, $w_{med} = w_n = w_1$. Variatia vitezei unghiulare conduce la dezvoltarea unei acceleratii unghiulare e a elementului conducator. Pentru buna functionare a unui mecanism sau masina se impune un anumit grad de neuniformitate d în functie de tipul masinii.

In stabilirea necesitatii volantului se pleaca de la expresia ecuatiei de miscare [1]. Considerând $J_{red} = \text{constant}$ rezulta ca acceleratia unghiulara e depinde invers proportional cu acesta:

$$e = \frac{M_{red}}{J_{red}} \quad (2)$$

Pentru ca $e \rightarrow 0$ trebuie ca $J_{red} \rightarrow \infty$. Cum acest lucru este imposibil se mareste $J_{red}(f)$ la un moment de inertie total $J_{total} = J_v + J_{red}(j)$ unde J_v este momentul de inertie al unui volant montat pe elementul de reducere. Marimea lui J_v depinde de viteza unghiulara a elementului de reducere ω_1 si de gradul de neregularitate, d .

Dintre metodele de calcul ale lui J_v se pot aminti : metodele Wittenbauer, Gutiar, Artobolevski, Radinger si metoda aproximativa.

In cadrul metodei Wittenbauer se utilizeaza diagrama $\Delta E_c(J_{red})$ unde prin ΔE_c s-a notat variatia energiei cinetice a mecanismului pe un ciclu cinematic (fig.1). Pentru calculul momentului de inertie al volantului, J_v , pe lângă trasarea diagramei $\Delta E_c(J_{red})$ mai trebuiesc calculate pantele dreptelor tangente la curba, cu relatiile :

$$\operatorname{tg} \Psi_{\max} = \frac{1}{2} \cdot w_{\text{med}}^2 \cdot \frac{k_J}{k_E} \cdot (1+d) \quad \operatorname{tg} \Psi_{\min} = \frac{1}{2} \cdot w_{\text{med}}^2 \cdot \frac{k_J}{k_E} \cdot (1-d) \quad (3)$$

unde k_J si k_E sunt scarile de reprezentare ale momentului de inertie redus si ale energiei cinetice. Se masoara segmentele (ab) sau (AB) si, în functie de marimea acestora, se poate calcula valoarea momentului de inertie al volantului, J_v cu relatiile :

$$J_v = \frac{k_E \cdot (ab)}{d \cdot w_{\text{med}}^2} \quad \text{sau} \quad J_v = \frac{k_E \cdot (MN)}{d \cdot w_{\text{med}}^2} \quad (4)$$

unde $(MN) = (OB) \cdot \operatorname{tg} \Psi_{\max} - (OA) \cdot \operatorname{tg} \Psi_{\min}$.

Lucrarea expune principiul matematic prin intermediul caruia se evita reprezentarea punct cu punct a graficului $\Delta E_c(J_{\text{red}})$ si masurarea pe desen a lungimii segmentelor (ab) sau (AB). In acest scop se utilizeaza calculatorul pentru calculul simbolic sau numeric si reprezentarea grafica a rezultatelor.

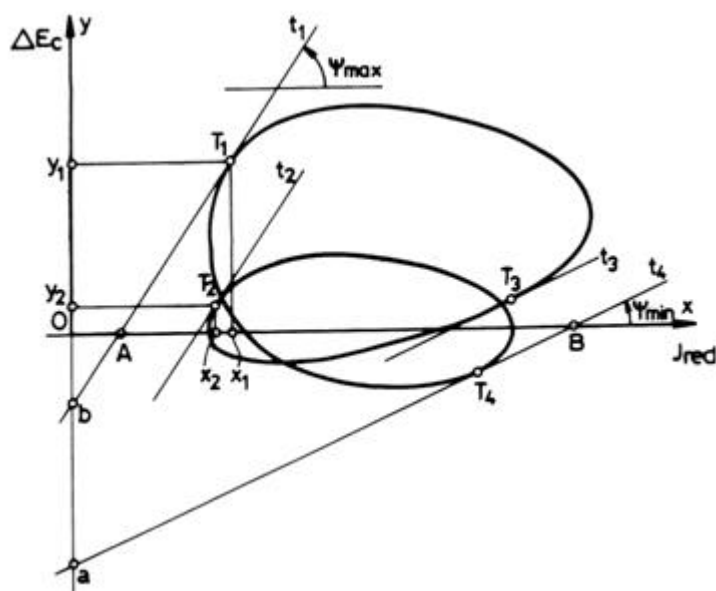


Fig.1. Diagrama pentru calculul momentului de inertie al volantului

Se are în vedere ca în fiecare dintre punctele de tangență T_1 , T_2 , T_3 și T_4 se obține o radacina dubla prin intersectarea succesiva a dreptelor t_1 , t_2 , t_3 și t_4 cu curba de variatie a energiei în raport cu momentul de inertie redus. Altfel spus, pentru simplificarea prezentarii, se considera ca exista functia $y = f(x) = \Delta E_c(J_{\text{red}})$ si functia liniara $y = m \cdot x + n$ ce reprezinta dreapta t_1 de panta $m = \operatorname{tg} \Psi_{\max}$ si parametrul n ce urmeaza a fi determinat. Egalând cele doua functii pentru a determina punctele comune se obține functia $g(x) = f(x) - m \cdot x - n$ ale carei radacini sunt chiar punctele de tangență $T_i(x_i, y_i)$. In aceste puncte trebuie sa se anuleze atât functia $g(x)=0$ cât si derivata acesteia, $g'(x)=0$. Obținând radacinile x_1 și x_2 ale derivatei se înlocuiesc în $g(x)=0$ obținându-se valorile pentru parametrul n . Se scriu ecuatiile dreptelor de panta m si parametri n_1 și n_2 care trec prin punctele $T_1(x_1, y_1)$ și $T_2(x_2, y_2)$: $y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$ și $y - y_2 = m \cdot (x - x_2)$. Intersectând aceste drepte cu axa Ox se obțin punctele de abscisa $A_1(x_{A1}, 0)$ și $A_2(x_{A2}, 0)$. Se retine $A(x_A, 0)$ ca fiind punctul cu abscisa minima. Analog se procedeaza pentru dreapta t_4 , de panta $m = \operatorname{tg} \Psi_{\min}$ obținându-se punctul $B(x_B, 0)$ de abscisa maxima. Se poate determina astfel lungimea segmentului AB în marime reala ca fiind $AB = x_B - x_A$. Din acest

moment sunt cunoscute toate elementele pentru a putea fi calculat momentul de inertie al volantului.

2.STUDIUL DE CAZ

In continuare este prezentat un studiu de caz pe mecanismul din fig. 2 .

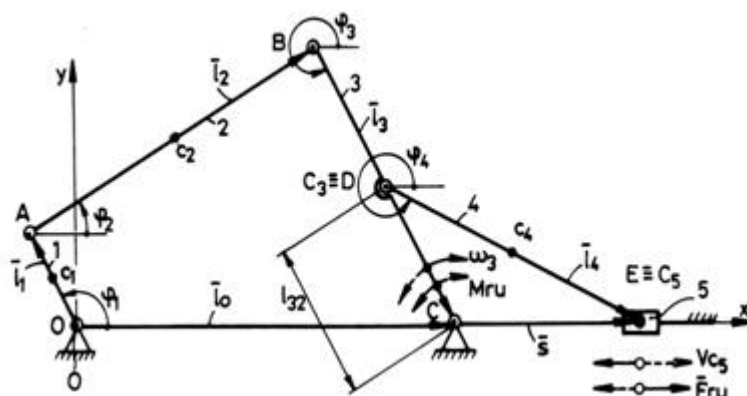


Fig.2. Mecanism pentru exemplificare

-lungimile elementelor cinematice :

$$l_1 = 0,2\text{m}; \quad l_2 = 0,7\text{m};$$

$$l_3 = 0,6\text{m}; \quad l_0 = 0,8\text{m};$$

$$l_4 = 0,6\text{m}; \quad l_{32} = 0,3\text{m};$$

-masele elementelor cinematice :

$$m_1 = 3\text{kg}; \quad m_2 = 6\text{kg};$$

$$m_3 = 5\text{kg}; \quad m_4 = 6\text{kg};$$

-fortele de greutate ale elementelor cinematice :

$$G_1 = 29,4\text{kg}; \quad G_2 = 58,8\text{N};$$

$$G_3 = 49\text{N}; \quad G_4 = 58,8\text{kg};$$

-momentele de inertie masice ale elementelor cinematice :

$$J_{C1} = 0,01\text{kgm}^2; \quad J_{C2} = 0,245\text{kgm}^2; \quad J_{C3} = 0,15\text{kgm}^2; \quad J_{C4} = 0,18\text{kgm}^2;$$

-momentul rezistent util aplicat elementului de executie: $M_{ru} = 500\text{N}$;

-forta rezistenta utila aplicata culisei: $F_{ru} = 800\text{N}$.

Utilizând metoda conturului vectorial închis în studiul cinematicii mecanismului considerat se scriu relațiile:

$$\bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 = \bar{l}_0 \quad \bar{l}_{32} + \bar{S} = \bar{l}_4 \quad (5)$$

Proiectând relațiile (5) pe axele de coordonate, se fac notațiile:

$$a_2(j_1) = 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \sin(j_1) \quad b_2(j_1) = 2 \cdot l_1 \cdot l_2 \cdot \cos(j_1) - 2 \cdot l_0 \cdot l_2 \quad (6)$$

$$c_2(j_1) = 2 \cdot l_1 \cdot l_0 \cdot \cos(j_1) + l_3^2 - l_1^2 - l_2^2 - l_0^2$$

$$a_3(j_1) = 2 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \sin(j_1) \quad b_3(j_1) = 2 \cdot l_1 \cdot l_3 \cdot \cos(j_1) - 2 \cdot l_0 \cdot l_3;$$

$$c_3(j_1) = 2 \cdot l_1 \cdot l_0 \cdot \cos(j_1) + l_2^2 - l_1^2 - l_3^2 - l_0^2$$

Valorile unghiurilor vectorilor conturului se calculează cu relațiile:

$$j_2(j_1) = -\arctan\left(\frac{b_2(j_1)}{a_2(j_1)}\right) + (-1)^{k_1} \cdot \arcsin\left[\frac{(-1)^{k_1} \cdot c_2(j_1)}{\sqrt{(a_2(j_1))^2 + (b_2(j_1))^2}}\right] + k_1 \cdot p \quad (7)$$

$$j_3(j_1) = -\arctan\left(\frac{b_3(j_1)}{a_3(j_1)}\right) + (-1)^{k_2} \cdot \arcsin\left[\frac{(-1)^{k_2} \cdot c_3(j_1)}{\sqrt{(a_3(j_1))^2 + (b_3(j_1))^2}}\right] + k_2 \cdot p$$

$$j_4(j_1) = (-1)^{k_3} \cdot \arcsin\left(\frac{l_{32}}{l_4} \cdot \sin(j_3(j_1))\right) + k_3 \cdot p$$

In continuare se prezinta relațiile de calcul ale vitezelor unghiulare și modul de calcul al vitezei unui centru de masă, C_5 :

$$w_2(j_1) = w_1 \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{\sin(j_3(j_1) - j_1)}{\sin(j_2(j_1) - j_3(j_1))}; \quad w_3(j_1) = w_1 \cdot \frac{l_1}{l_3} \cdot \frac{\sin(j_2(j_1) - j_1)}{\sin(j_3(j_1) - j_2(j_1))} \quad (8)$$

$$w_4(j_1) = w_3(j_1) \cdot \frac{l_{32} \cdot \cos(j_3(j_1))}{l_4 \cdot \cos(j_4(j_1))}$$

$$v_{x_{c3}}(j_1) = -l_1 \cdot w_1 \cdot \sin(j_1) - l_2 \cdot w_2(j_1) \cdot \sin(j_2(j_1)) - \frac{1}{2} \cdot l_3 \cdot w_3(j_1) \cdot \sin(j_3(j_1)) \quad (9)$$

$$v_{y_{c3}}(j_1) = l_1 \cdot w_1 \cdot \cos(j_1) + l_2 \cdot w_2(j_1) \cdot \cos(j_2(j_1)) + \frac{1}{2} \cdot l_3 \cdot w_3(j_1) \cdot \cos(j_3(j_1))$$

$$v_{c3}(j_1) = \sqrt{(v_{x_{c3}}(j_1))^2 + (v_{y_{c3}}(j_1))^2}$$

Plecând de la conditia ca lucrul mecanic motor sa fie egal cu lucrul mecanic rezistent pe un ciclu cinematic si tinând seama de relatiile de lucru de la momentul redus, se poate scrie succesiv:

$$L_m = L_r; L_m = \oint_{\Phi_c} M_{red}^m(j_1) \cdot dj_1; L_r = \oint_{\Phi_c} M_{red}^r(j_1) \cdot dj_1; M_m = \frac{L_m}{2 \cdot p} \quad (10)$$

$$\oint_{\Phi_c} (M_{red}^m(j_1) - M_{red}^r(j_1)) \cdot dj_1 = \oint_{\Phi_c} M_{red}(j_1) \cdot dj_1 = 0; \bar{M}_{red} \cdot \bar{w}_1 = \sum \bar{M}_j \cdot \bar{w}_j + \sum \bar{F}_j \cdot \bar{v}_{cj}$$

$$L_m = \oint_{\Phi_c} M_m \cdot dj_1 = \oint_{\Phi_c} M_{red}^*(j_1) \cdot dj_1 =$$

$$\oint_{\Phi_c} \frac{1}{w_1} (|M_{ru} \cdot w_3(j_1)| + |F_{ru} \cdot v_{c5}(j_1)| \cdot G_1 \cdot v_{c1}(j_1) + G_2 \cdot v_{c2}(j_1) + G_3 \cdot v_{c3}(j_1)) \cdot dj_1$$

Având momentul motor calculat se poate determina în continuare momentul redus, M_{red} , momentul de inertie redus, $J_{red}(j_1)$ precum si variatia energiei cinetice, $\Delta E_c(j_1)$.

$$M_{red}(j_1) = M_m - M_{red}^*(j_1); \Delta E_c(j_1) = \int M_{red}(j_1) \cdot dj_1 \quad (11)$$

$$J_{red}(\varphi_1) = \frac{1}{\omega_1^2} \cdot (m_1 \cdot v_{c1}^2(\varphi_1) + m_2 \cdot v_{c2}^2(\varphi_1) + m_3 \cdot v_{c3}^2(\varphi_1) + J_{cl} \cdot \omega_1^2 +$$

$$+ J_{c2} \cdot \omega_2^2(\varphi_1) + J_{c3} \cdot \omega_3^2(\varphi_1) + J_{c4} \cdot \omega_4^2(\varphi_1))$$

Utilizând mediul MathCAD se poate calcula si trasa diagrama $\Delta E_c(J_{red}(j_1))$.

In continuare sunt prezentate diagramele si valorile numerice obtinute pe baza relatiilor (5)...(11).

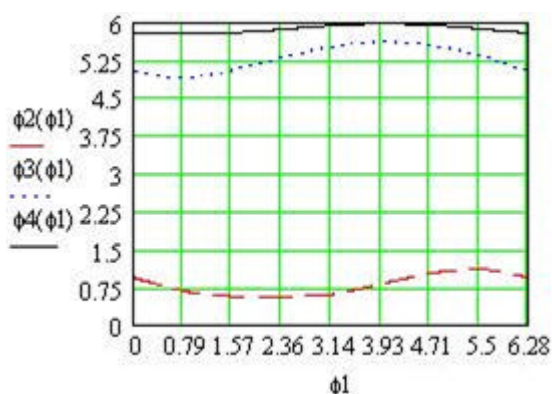


Fig.3. Variatia unghiurilor vectorilor

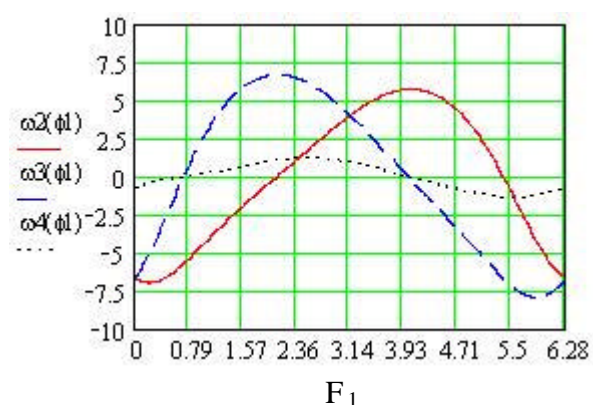


Fig.4. Variatia vitezelor unghiulare

In fig.3. si fig.4. unghiurile sunt exprimate în radiani iar vitezele unghiulare în s^{-1} . Din considerente de simplificare a notatiilor în MathCAD se face precizarea ca $f_i = j_i$ si $w_i = w_i$.

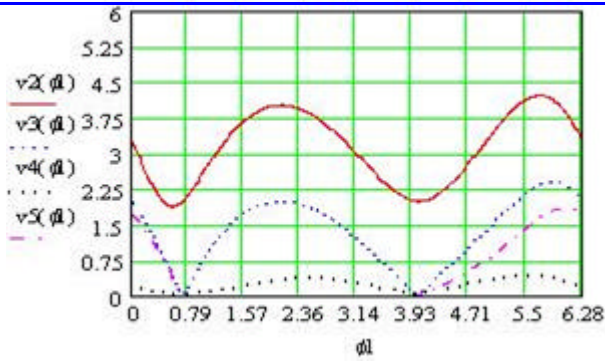


Fig.5. Variatia vitezelor centrelor de masa

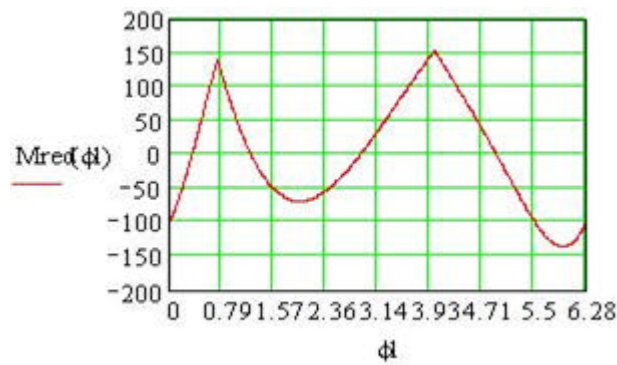


Fig.6. Variatia momentului redus

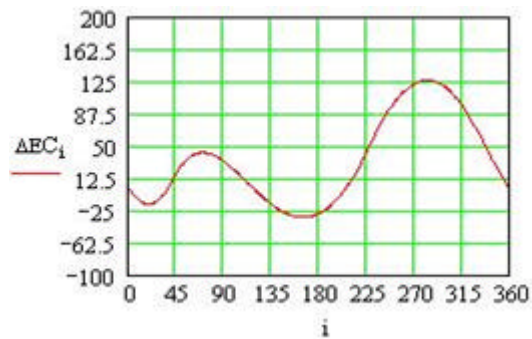


Fig.7. Variatia energiei cinetice pe un ciclu cinematic

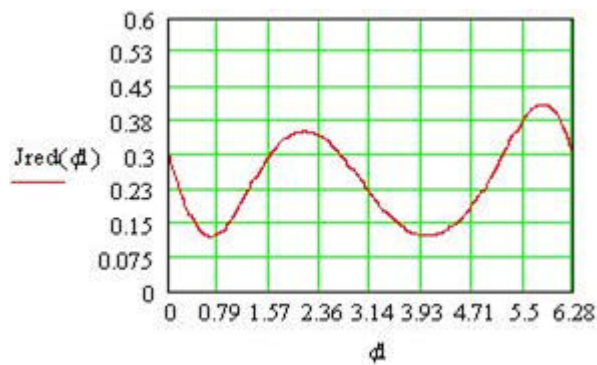


Fig.8. Variatia momentului de inertie redus

Pentru figurile 5...8 se fac urmatoarele precizari:

-în fig.5, $v_i(f1) = v_{Ci}(j_1)$ [m/s], $f1 = j_1$ [rad];

-în fig.6, $M_{red}(f1) = M_{red}(j_1)$ [Nm], $f1 = j_1$ [rad];

-în fig.7, $\Delta EC_i = \Delta E_C$ [Nm], $i = j_1$, [rad];

-în fig.8, $J_{red}(f1) = J_{red}(j_1)$, $f1 = j_1$ [rad].

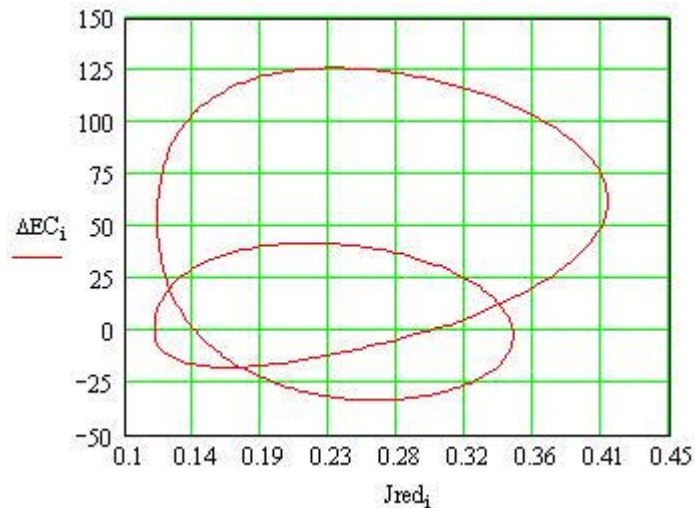


Fig.9. Variatia energiei cinetice în functie de momentul de inertie redus

Pe baza relatiilor stabilite mai sus s-au obtinut urmatoarele valori:

-pentru lucrul mecanic motor, $L_m=931,525$ Nm;

-pentru momentul motorului de actionare, $M_m=148,257$ Nm;

-pentru momentul de inertie al volantului, $J_v=4,050$ kgm², considerând $d = 0,1$.

Bibliografie

1. PANAIT, GH. , SAVA, M. , FLOREA I. - *Teoria mecanismelor si masinilor*. Editura UNIVERSAL CARTFIL, Ploiesti, 1998.
2. ANTONESCU, P. – *Mecanisme*. Editura PRINTECH, Bucuresti, 2003.