

## MODELAREA SISTEMULUI MECANIC AL SITEI PENDULARE ANTRENATA CU UN GENERATOR CU O MASA NEECHILIBRATA

Mircea Bogdan, TATARU, Alexandru RUS

Universitatea Oradea, btataru@uoradea.ro, alrus@uoradea.ro

### Abstract

This paper presents some aspects concerning modelling and simulation of a mechanical system with spherical pendulum. Model is treated both in analytical form and in numerical form in order to compare distortions that occur. Using linearized terms when analytical model is very difficult to solve is not always the best decision. Numerical calculus should take place not only for the sake of giving a solution but also as a manner of approach. A numerical data example is given in order to take advantage of the more specific case. Key words for this paper is numerical modelling instead of analytical simplified but not accurate one.

### 1. Consideratii generale

În aceasta lucrare se va trata modelul clasic si numeric în vederea simulării miscării sitei vibratoare pendulare antrenata cu generator cu o masa neechilibrata.

Sitele vibratoare pendulare pot fi folosite la cernerea materialelor la care producerea unei segregatii satisfacatoare necesita miscari complexe ale organului de lucru si pentru care în general nu este indicata desprinderea materialului de pe sita [1].

O sita pendulara are forma unui pendul sferic (Fig.1,a),b)) si este alcatuita dintr-un generator de vibratii – 1, montat pe organul de lucru – 2, care contine pânză sitei, tija de legatura 3, montata la un capăt, la organul de lucru prin intermediul unui lagar axial, iar la celalalt capă prin intermediul unei articulatii sferice 4. Varianta constructiva din figura 1 b) are în plus un arc de ancorare -5, montat cu scopul cresterii valorii pulsatiei proprii si largirea domeniului de stabilitate în domeniul frecventelor mari.

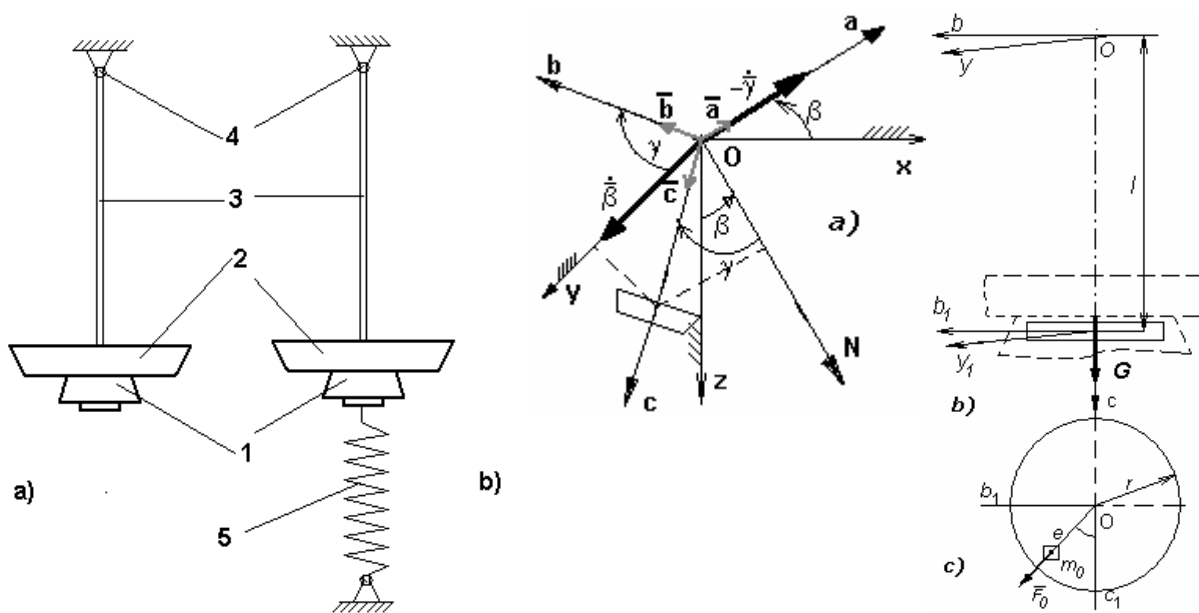


Fig. 1 – Modelul constructiv schematic al sitei pendulare: a) – fara element elastic; b) – cu element elastic

Fig.2 – Modelul schematic de calcul: a) – sisteme de coordonate, b) – miscare pendulara, c) – generator cu o masa neechilibrata

Generatorul de vibratii utilizat este de tip mecanic, cu un volant cu o masa neechilibrata static amplasat într-un plan normal la tija de sustinere.

## 2. Modelul analitic.

Se va analiza întâi modelul dinamic analitic aproximat cunoscut în literatura de specialitate [3] pentru varianta constructiva fara arc de ancorare.

Notatiile principale utilizate sunt:

$\mathbf{b}, \mathbf{g}$  - parametrii miscarii vibratorii;  $\mathbf{j}$  - parametru miscarii relative în raport cu sistemul mobil;  $\mathbf{w}$  - viteza unghiulara constanta de antrenare;  $l$  - distanta de la articulatia sferica la centrul de greutate;  $m_1$  - masa ansamblului organ de lucru, motor electric si cadru suport;  $m_2$  - masa organului de lucru;  $m$  - masa volantului;  $m_0$  - masa greutatii neechilibrate;  $i_1$  - raza de inertie a masei  $m_1$  în raport cu axa de rotatie ;  $i_2$  - raza de inertie a masei  $m_2$  în raport cu axa de rotatie ;  $J_1, J_2, J_3$  - moment de inertie în raport cu axele  $Oc, Ob, Oa$ ;  $J_{a1}, J_{b1}, J_{c1}, J_{1c}, J_1', J_1''$  - momentele de inertie reduse ale organelor în miscare relativa.

Se alege un sistem de referinta mobil  $Oabc$  (Fig. 2) astfel încât axa  $Oc$  sa coincida cu tija sitei, axa  $ON$  este proiectia axei  $Oc$  pe planul  $xOz$ , axa  $Oy$  fiind în acelasi plan cu  $Oc$  si  $ON$ . În planul  $xOz$  se afla axa  $Oa$  care face unghiul  $\mathbf{b}$  cu  $Ox$ , fiind perpendiculara pe axa  $ON$  si pe planul  $Ony$ . A treia axa  $Ob$  formeaza împreuna cu axele  $Oa$  si  $Oc$  un triedru drept.

Cosinusurile directoare ale sistemului  $Oabc$  în raport cu sistemul  $Oxyz$  sunt date în Tabelul 1:

Tabelul 1

	$\bar{i}$	$\bar{j}$	$\bar{k}$
$\bar{a}$	$\cos \mathbf{b}$	0	$-\sin \mathbf{b}$
$\bar{b}$	$-\sin \mathbf{b} \cdot \sin \mathbf{g}$	$\cos \mathbf{g}$	$-\cos \mathbf{b} \cdot \sin \mathbf{g}$
$\bar{c}$	$\sin \mathbf{b} \cdot \cos \mathbf{g}$	$\sin \mathbf{g}$	$\cos \mathbf{b} \cdot \cos \mathbf{g}$

Viteza unghiulara rezultanta a deplasarii sistemului  $Oabc$ , adica viteza unghiulara de transport, este:

$$\bar{\mathbf{w}}_1 = -\dot{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{j}} = -\dot{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{a}} + \dot{\mathbf{b}} \cdot \cos \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{b}} + \dot{\mathbf{b}} \cdot \sin \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{c}} \quad (1)$$

Momentul cinetic corespunzator miscarii de transport este:

$$\bar{K}_{Or} = -J_3 \cdot \dot{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{a}} + J_2 \cdot \dot{\mathbf{b}} \cdot \cos \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{b}} + J_1 \cdot \dot{\mathbf{b}} \cdot \sin \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{c}} \quad (2)$$

Axele  $Oa, Ob, Oc$  se presupun într-o prima aproximatie ca fiind axe principale de inertie. Momentul cinetic corespunzator miscarii relative, ce depinde de tipul generatorului de vibratii este:

$$\bar{K}_{Oc} = K_{Oc} \cdot \bar{\mathbf{c}} = J_{1c} \cdot \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{c}} \quad (3)$$

Momentul cinetic corespunzator miscarii absolute este:

$$\bar{K}_O = \bar{K}_{Oc} + \bar{K}_{Or} = -J_3 \cdot \dot{\mathbf{g}} \cdot \bar{\mathbf{a}} + J_2 \cdot \dot{\mathbf{b}} \cdot \cos \mathbf{g} \cdot \bar{\mathbf{b}} + (J_1 \cdot \dot{\mathbf{b}} \cdot \sin \mathbf{g} + K_{Oc}) \cdot \bar{\mathbf{c}} \quad (4)$$

Deoarece centrul de greutate al organului de lucru efectueaza mici oscilatii, se poate considera:  $\sin \mathbf{b} \cong \mathbf{b}, \cos \mathbf{b} \cong 1, \sin \mathbf{g} \cong \mathbf{g}, \cos \mathbf{g} \cong 1$ , Rezulta:

$$\bar{a} = \bar{i} - b\bar{k} \ ; \ \bar{b} = -b\bar{g}\bar{i} + \bar{j} - g\bar{k} \ ; \ \bar{c} = b\bar{i} + g\bar{j} + \bar{k} \quad (5)$$

Tinând seama de relatiile (5) si neglijând termenii de grad superior puterii a doua, proiectiile momentului cinetic absolut sunt:

$$\begin{aligned} K_{Ox} &= -J_3 \dot{\bar{g}} + K_{Oc} \cdot \mathbf{b} = -J_3 \dot{\bar{g}} + J_{c1} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{b} \ ; \\ K_{Oy} &= J_2 \cdot \dot{\bar{b}} + K_{Oc} \cdot \mathbf{g} = J_2 \cdot \dot{\bar{b}} + J_{c1} \cdot \mathbf{w} \cdot \mathbf{g} \ ; \\ K_{Oz} &= J_3 \cdot \mathbf{b} \cdot \dot{\bar{g}} - J_2 \cdot \dot{\bar{b}} \cdot \mathbf{g} + J_1 \cdot \dot{\bar{b}} \cdot \mathbf{g} + K_{Oc} = J_3 \cdot \mathbf{b} \cdot \dot{\bar{g}} - J_2 \cdot \dot{\bar{b}} \cdot \mathbf{g} + J_1 \cdot \dot{\bar{b}} \cdot \mathbf{g} + J_{c1} \cdot \mathbf{w} \end{aligned} \quad (6)$$

Momentul rezultat al fortelor excitatoare în raport cu punctul O este (Fig. 3 a,b):

$$\bar{M}_O = \bar{M}_{OF} + \bar{M}_{OG} = l\bar{c} \times \bar{F} + l\bar{c} \times \bar{G} \quad (7)$$

unde

$$\bar{F} = \bar{a} \cdot F_0 \cdot \cos \mathbf{w}t + \bar{b} \cdot F_0 \cdot \sin \mathbf{w}t \ ; \ F_0 = m_0 \cdot e \cdot \mathbf{w}^2 \ ; \ \bar{G} = -(m + m_0 + m_1) \cdot g \bar{k} \quad (8)$$

Tinând cont de (5) si de (7), precum si de egalitatile:  $\bar{c} \times \bar{a} = \bar{b}$  ;  $\bar{c} \times \bar{b} = -\bar{a}$  expresia momentului rezultat este:

$$\bar{M}_O = \bar{i} \cdot [lG \mathbf{g} - F_0 \cdot l \cdot (\sin \mathbf{w}t + b\mathbf{g} \cos \mathbf{w}t)] + \bar{j} \cdot (F_0 \cdot l \cdot \cos \mathbf{w}t - lG \cdot \mathbf{b}) + \bar{k} \cdot F_0 \cdot l \cdot (\mathbf{b} \sin \mathbf{w}t - \mathbf{g} \cos \mathbf{w}t) \quad (9)$$

Exprimarile momentelor de inertie sunt (fig.3 b):

$$\begin{aligned} J_1 &= m_1 \cdot i_1^2 + \frac{m \cdot r^2}{2} + m_0 \cdot e^2, \\ J_2 &= J_{a1} + (m_1 + m + m_0) \cdot l^2, \\ J_3 &= J_{y1} + (m_1 + m + m_0) \cdot l^2, \\ J_{a1} &= \frac{m_1 \cdot i_1^2}{2} + \frac{m \cdot r^2}{4} + m_0 \cdot e^2 \cdot \cos^2 \mathbf{w}t, \\ J_{b1} &= \frac{m_1 \cdot i_1^2}{2} + \frac{m \cdot r^2}{4} + m_0 \cdot e^2 \cdot \sin^2 \mathbf{w}t, \\ J_{c1} &= m_2 \cdot i_2^2 + \frac{m \cdot r^2}{2} + m_0 \cdot e^2, \\ J_{y1} &= J_{b1} \cdot \cos^2 \mathbf{g} + J_{c1} \cdot \sin^2 \mathbf{g} \cong J_{b1} \ ; \ \mathbf{g} - \text{foarte mic} \end{aligned} \quad (10)$$

Aplicând teorema momentului cinetic:

$$\frac{d\bar{K}_O}{dt} = \bar{M}_O \quad (11)$$

si utilizând relatiile (3), (6) si (8), se obtine sistemul de ecuatii diferentiale:

$$\begin{aligned}
 J_3 \ddot{\mathbf{g}} - J_{c1} \cdot \omega \dot{\mathbf{b}} + l \cdot G \mathbf{g} &= F_0 \cdot l \cdot (\sin \omega t + \mathbf{b} \mathbf{g} \cos \omega t), \\
 J_2 \ddot{\mathbf{b}} + J_{c1} \cdot \omega \dot{\mathbf{g}} + l \cdot G \mathbf{b} &= F_0 \cdot l \cdot \cos \omega t, \\
 J_3 \cdot \mathbf{b} \ddot{\mathbf{g}} + (J_1 - J_2) \cdot \dot{\mathbf{b}} \dot{\mathbf{g}} + (J_1 + J_3 - J_2) \cdot \dot{\mathbf{b}} \dot{\mathbf{g}} &= F_0 \cdot l \cdot (\mathbf{b} \sin \omega t - \mathbf{g} \cos \omega t)
 \end{aligned}
 \tag{12}$$

Daca se înmulteste prima din cele trei ecuatii din (12) cu  $-\mathbf{b}$  si a doua cu  $\mathbf{g}$  si se aduna toate trei se obtine:

$$\frac{\omega}{2} \cdot \frac{d}{dt} (\mathbf{b}^2 + \mathbf{g}^2) - \frac{J_1}{J_{c1}} \cdot \frac{d}{dt} (\dot{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{g}) - \frac{J_3 - J_2}{J_{c1}} \cdot (\dot{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{g}}) = -l \cdot F_0 \cdot \mathbf{b}^2 \mathbf{g} \cdot \cos \omega t
 \tag{13}$$

Expresia rezultata prin integrarea ecuatiei (13) reprezinta traiectoria centrului de greutate a organului de lucru al sitei:

- Daca se *neglijeeza* ultimii doi termeni si termenul din dreapta al ecuatiei în baza faptului ca  $\mathbf{b} \mathbf{g}$  are valoare neglijabila aproape nula atunci:

$$\frac{\omega}{2} \frac{d}{dt} (\mathbf{b}^2 + \mathbf{g}^2) = 0
 \tag{14}$$

de unde:

$$\mathbf{b}^2 + \mathbf{g}^2 = \text{const.}
 \tag{15}$$

si care prin transformarile:

$$x = l \cdot \sin \mathbf{b} \cdot \cos \mathbf{g} \cong l \cdot \mathbf{b} \quad ; \quad y = l \cdot \sin \mathbf{g} \cong l \cdot \mathbf{g} \quad ; \quad z = l \cdot \cos \mathbf{b} \cdot \cos \mathbf{g} \cong l
 \tag{16}$$

devine:

$$x^2 + y^2 = \text{const.} = r^2
 \tag{17}$$

traiectorie circulara de raza  $r$  situata într-un plan tangent la sfera de raza  $l$ .

- Daca *nu se neglijeeza* termenii mentionati anterior atunci traiectoria circulara va fi deformata, efectul perturbator datorându-se prezentei coeficientilor:  $\frac{J_1}{J_{c1}}$  si  $\frac{J_3 - J_2}{J_{c1}}$

ecuatia diferentiala (13) fiind mai greu de integrat pe cale analitica

Termenii variabili din expresiile (10) ale momentelor de inertie fiind foarte mici în raport cu ceilalti pot fi neglijati obtinând astfel:

$$J_2 = J_3 = J = \frac{m_1 \cdot i_1^2}{2} + \frac{m \cdot r^2}{4} + (m_1 + m + m_0) \cdot l^2
 \tag{18}$$

Pentru determinarea solutiilor sistemului de ecuatii diferentiale, se considera astfel doar primele doua ecuatii ale sistemului (12) obtinându-se sistemul de ecuatii diferentiale:

$$\begin{aligned}
 J \ddot{\mathbf{g}} - J_{c1} \cdot \omega \dot{\mathbf{b}} + l \cdot G \mathbf{g} &= F_0 \cdot l \cdot \sin \omega t, \\
 J \ddot{\mathbf{b}} + J_{c1} \cdot \omega \dot{\mathbf{g}} + l \cdot G \mathbf{b} &= F_0 \cdot l \cdot \cos \omega t
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Se introduc notatiile adimensionale:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{m_0}{m} ; m_1 = \frac{m_1}{m} ; m_2 = \frac{m_2}{m} ; \\ x &= \frac{e}{r} ; h_1 = \frac{i_1}{r} ; h_2 = \frac{i_2}{r} ; z = \frac{l}{r} ; \end{aligned} \quad (20)$$

si pulsatia proprie a pendulului simplu:

$$p_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \quad (21)$$

sistemul (12) se scrie:

$$\begin{aligned} A_1 \cdot \ddot{\mathbf{b}} + A_2 \cdot \dot{\mathbf{g}} + A_3 \cdot p_0^2 \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{w}^2 A_4 \cdot \cos \mathbf{w}t \\ A_1 \cdot \ddot{\mathbf{g}} - A_2 \cdot \dot{\mathbf{b}} + A_3 \cdot p_0^2 \cdot \mathbf{g} &= \mathbf{w}^2 A_4 \cdot \sin \mathbf{w}t \end{aligned} \quad (22)$$

în care sau definit coeficientii:

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{4} [1 + 2m_1 h_1^2 + 4z^2 (1 + m_0 + m_1)], \\ A_2 &= \frac{1}{2} (1 + 2m_0 x^2 + 2m_2 h_2^2), \\ A_3 &= z^2 (1 + m_0 + m_1), \\ A_4 &= m_0 z x \end{aligned} \quad (23)$$

Ecuatia pulsatiilor proprii este:

$$\begin{vmatrix} A_3 p_0^2 - A_1 p^2 & A_2 p^2 \\ A_2 p^2 & A_3 p_0^2 - A_1 p^2 \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

a carei solutie da viteza unghiulara critica (la rezonanta):

$$p^2 = \mathbf{w}_{rez}^2 = \frac{A_3}{A_1 - A_2} \cdot p_0^2 \quad (25)$$

Miscarea stationara este descrisa de o solutie particulara de forma:

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 \cdot \cos \mathbf{w}t \quad ; \quad \mathbf{g} = \mathbf{g}_0 \cdot \sin \mathbf{w}t \quad (26)$$

pentru care amplitudinile se determina din sistemul:

$$\begin{aligned} (A_3 p_0^2 - A_1 \mathbf{w}^2) \cdot \mathbf{b}_0 + A_2 \mathbf{w}^2 \cdot \mathbf{g}_0 &= A_4 \mathbf{w}^2, \\ A_2 \mathbf{w}^2 \cdot \mathbf{b}_0 + (A_3 p_0^2 - A_1 \mathbf{w}^2) \cdot \mathbf{g}_0 &= A_4 \mathbf{w}^2 \end{aligned} \quad (27)$$

si este de forma:

$$\mathbf{b}_0 = \mathbf{g}_0 = \frac{A_4 \mathbf{w}^2}{A_3 p_0^2 - (A_1 - A_2) \mathbf{w}^2} \cdot p_0^2 \quad (28)$$

Valorile limita ale amplitudinilor pentru  $\mathbf{w} \rightarrow \infty$  sunt:

$$|\mathbf{b}_0| = |\mathbf{g}_0| = \left| \frac{A_4}{A_2 - A_1} \right| \quad (29)$$

Valorile admisibile pentru parametri dati prin ecuatiile (19) – (28) sunt date în tabelul:

Tabelul 2

Generalizat		$m = 10 \text{ kg}; r = 300 \text{ mm}$			
Parametri	Interval de valori	$m_0$	1 kg	$m_0$	0,1
$m_0$	(0,05 ; 0,3)	$m_1$	100 kg	$m_1$	10
$m_1$	(5 ; 20)	$m_2$	40 kg	$m_2$	4
$m_2$	(3 ; 10)	$i_1$	300 mm	$h_1$	1
$h_1$	(0,5 ; 2)	$i_2$	400 mm	$h_2$	1,5
$h_2$	(0,8 ; 3)	$e$	150 mm	$x$	0,5
$x$	(0,3 ; 0,8)	$l$	1800 mm	$z$	6
$z$	(4 ; 16)	$A_1$	404,85	$p_0$	2,334 rad/s
$w_{rez}$	(1,00995 ; 1,140175) $p_0$	$A_2$	7,636	$w = \frac{p \cdot n}{30}$	94,2 rad/s
$b_{0l} = g_{0l}$	(0,001 ; 0,006) rad	$A_3$	399,6	$b_{0l} = g_{0l}$	0,0049 rad
$X_{0l}=y_{0l}$	(1 ; 10) mm	$A_4$	0,3	$X_{0l}=y_{0l}$	8,8 mm

Pentru o mai precisa descriere a miscarii organului de lucru sunt necesare integrari numerice ale sistemului de ecuatii diferentiale (12), tinându-se cont si de termenii neglijati mai sus.

### 3. Modelul SimMechanics (MATLAB.R13®)

Dupa cum se observa în paragraful anterior în abordarea analitica a modelului de calcul dinamic al sitei pendulare antrenata cu un generator cu o masa neechilibrata se fac suficiente aproximari pentru ca gradul de exactitate al solutiei ce descrie legea de miscare a organului de lucru sa nu satisfaca gradul de precizie necesar perfectionarii sistemului mecanic analizat.

În lucrarea de fata se prezinta un model numeric de simulare, mai exact din punctul de vedere al analizei dinamice, obtinut relativ usor cu instrumentele de lucru puse la dispozitie de mediul de programare al toolbox-ului SimMechanics al programului MATLAB® [2]

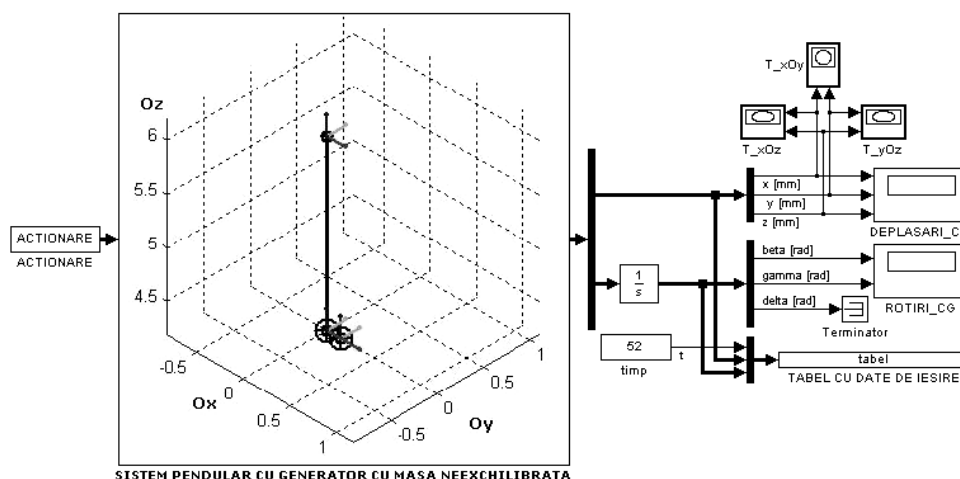


Fig.3 – Schema compacta a modelului de modelare si simulare sistemului mecanic pendular sferic

Modelul de mai sus permite stabilirea unei solutii exacte chiar în cazul nelinier așa cum rezulta din diagramele traiectoriilor din figurile de mai jos.

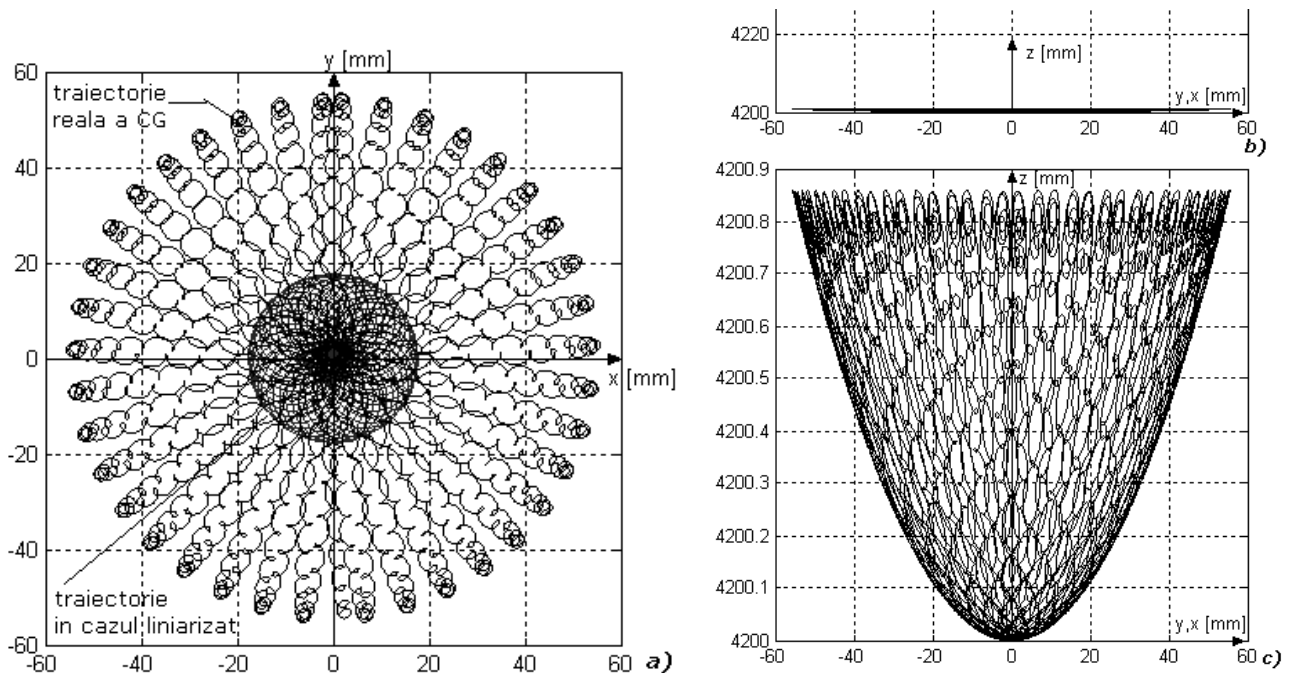


Fig. 4 – Traiectoria CG a organului de lucru: a) în planul  $xOy$ , b) în planul  $xOz$  sau  $yOz$ -proporționat prezentată, c) în planul  $xOz$  sau  $yOz$ -disproporționat prezentată,

Schema a fost structurată cu datele de calcul prezentate în Tabelul 2. Legile de variație cu timpul ale principalilor parametri de mișcare  $x$ ,  $y$  și  $z$ ;  $\beta$  și  $\gamma$  sunt date în Fig. 5, iar legile de variație cu timpul comparativ în cele două cazuri sunt prezentate în Fig.6:

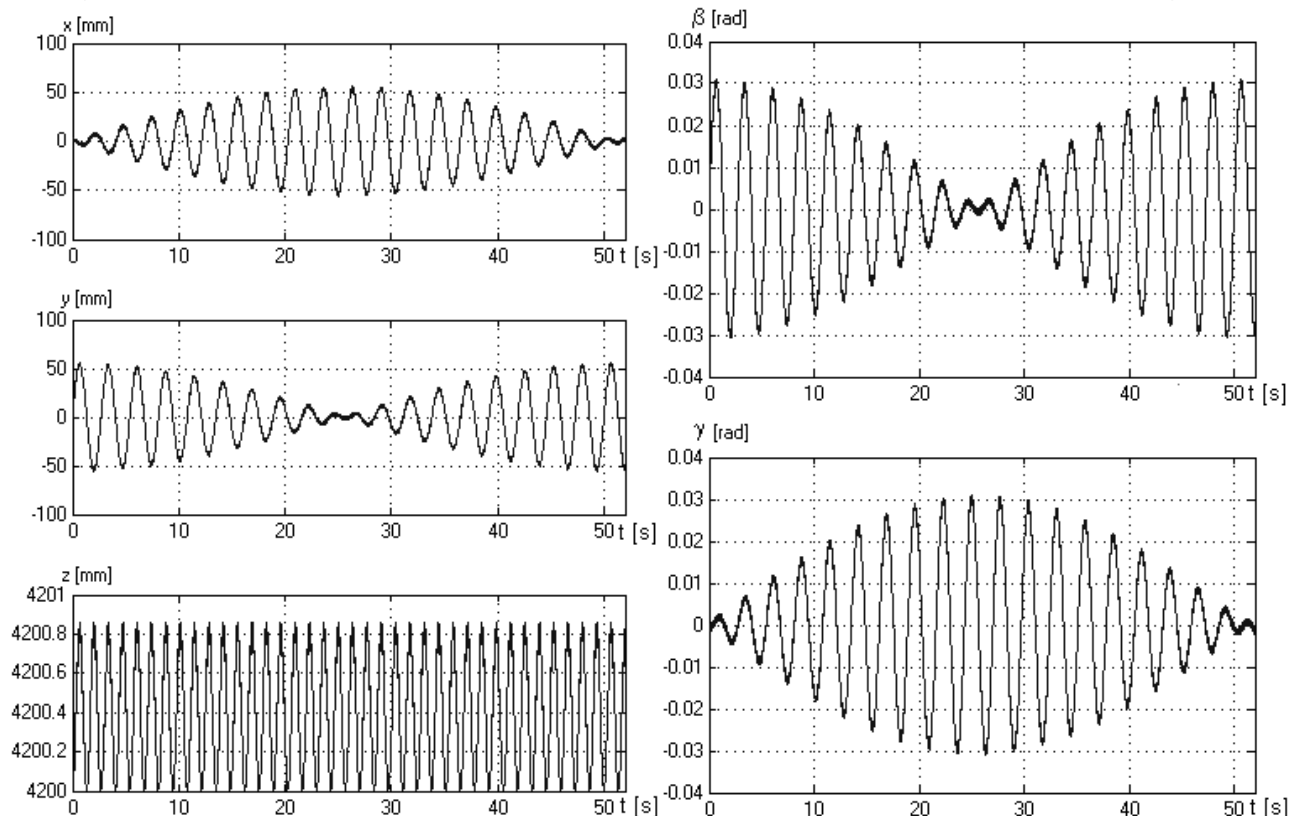
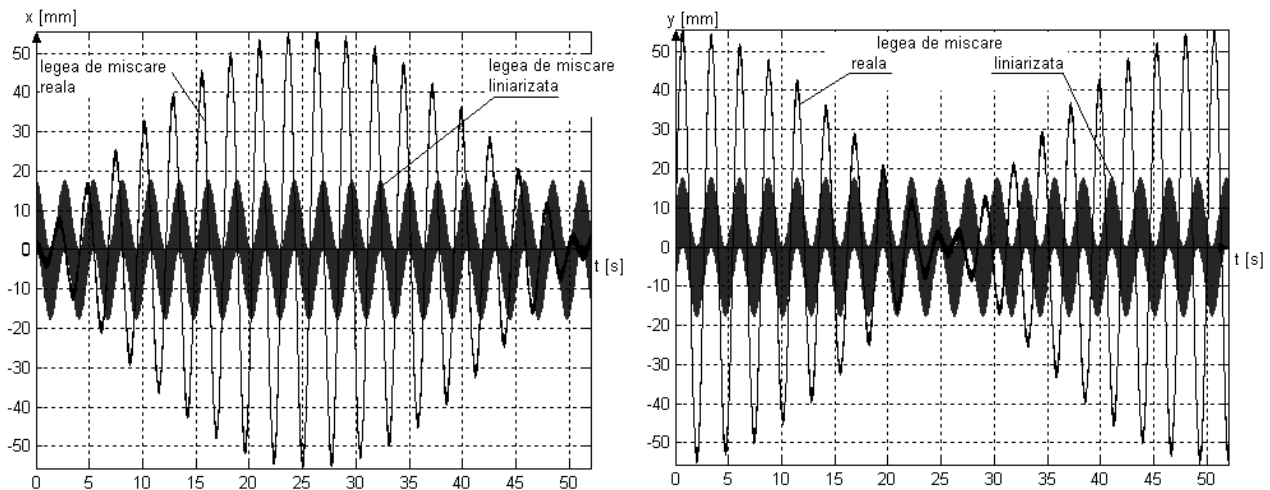


Fig. 5 - Legile de variatie în timp parametrilor:  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $\beta$  și  $\gamma$  ai centrului de greutate al O.L.Fig. 6 – Legile de miscare  $x(t)$ ,  $y(t)$  ale CG comparativ trasata pentru cele doua cazuri luate în calcul

#### 4. Concluzii

Se observa diferentele notabile dintre cele doua abordari de rezolvare a problemei.

Desigur rezolvarea pe cale analitica sau numerica a problemei miscarii unui organ de lucru al unei masini care utilizeaza miscare pendulara nu substituie problematica inginereasca a îmbunatatirii functionarii acesteia prin mijloace constructive, dar poate constitui un prim pas al rezolvarii acestei probleme.

Asa cum s-a aratat mai sus este necesara adaugarea unor elemente elastice si de amortizare pentru rezolvarea unor probleme legate de functionalitatea acestui sistem si anume separarea materialului poligranular

Aceasta va face obiectul unei alte lucrari.

#### Bibliografie

- [1] Kuprit, I.N., Tehnologia moraritului, Editura Tehnica, Bucuresti 1954
- [2]\*\*\* Matlab with Simulink®R13, Help Documentation, SimMechanics Toolbox, 2003
- [3] Munteanu, M., Introducere în dinamica masinilor vibratoare, Editura Academiei R.S.R., Bucuresti -1986,