

## Calculul matricii de rigiditate a rulmentilor radiali

Sorin PATER, Tudor MITRAN, Andrei COCAINA  
Universitatea din ORADEA

Résumât:

Les paliers a roulement sont des constituants mécaniques qui transmettent des efforts entre deux organes tournant l'un par rapport à l'autres. De manière générale, l'analyse de la répartition des charges dans les paliers à roulement doit inclure les relations non linéaires liant les efforts et les déplacements lors des contacts entre les éléments roulants et les pistes.

### 1. Modelarea rulmentilor

Ideea esentiala urmarita este de discretizarea rulmentului în “elemente de rostogolire” cu role sau bile si de asociere fiecarui element un element finit. Aproximarea prin metoda fortelor clasice pentru rulmenti a fost înlocuita cu metoda deplasarii în scopul utilizarii unei metode globale care permite legatura între calculul rulmentului si calculul structurii globale.

Aceste elemente numite “elemente de rostogolire” considerate ca fiind o placa plana face legatura între un nod al inelului interior si un nod al inelului exterior prin intermediul unei matrici de rigiditate cu dimensiunile  $10 \times 10$ . Aceasta matrice stabileste legatura între cele zece grade de libertate active ( $2 \times 3$  grade de libertate de translaticie si  $2 \times 2$  grade de libertate de rotatie) si asigura transmiterea a trei forte si doua momente. Gradele de libertate corespunzatoare rotatiei rulmentului sunt libere de toate legaturile nici un moment nu este transmis pe directia respectiva.

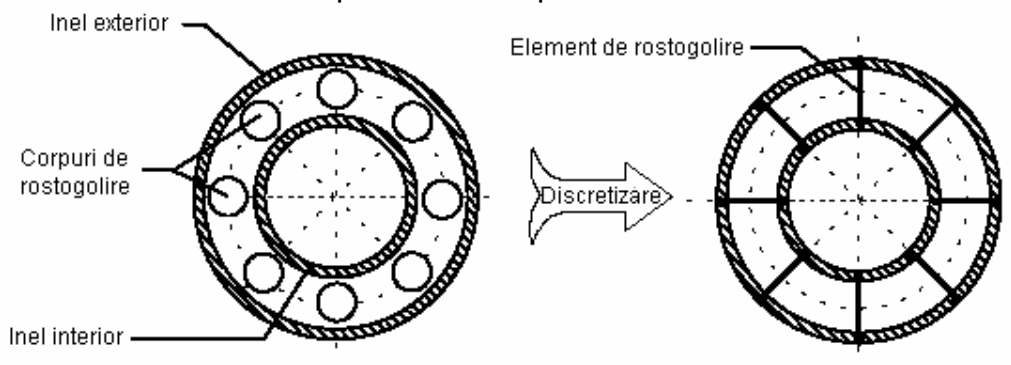


Figura 1. Discretizarea rulmentilor în “elemente de rostogolire”

Discretizarea inelelor a fost verificata prin urmatoarele ipoteze:

- sectiunea transversala a inelelor este nedeformabila.
- pentru fiecare corp de rostogolire corespunde un nod al inelului exterior si un nod al inelului interior. Aceste noduri sunt situate într-un plan radial care contine centrul corpului de rostogolire.

## 2. Determinarea echilibrului corpului de rostogolire

Pentru determinarea echilibrului corpului de rostogolire vom efectua calcule în planul radial în raport cu sistemul de coordonate  $S_3$ . În acest plan, deplasările inelului exterior sunt nule, iar cele ale inelului interior se exprima în  $C_r$ , funcție de deplasările relative ale nodurilor  $N_2$  în raport cu nodul  $N_1$ , în sistemul de coordonate  $S_1$  cu relația:

$$\{\vec{u}\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_q \\ u_z \end{Bmatrix} = [G_2] \left( \{\overline{dep}(N_2)\}_{S_1} - \{\overline{dep}(N_1)\}_{S_1} \right) \quad (1)$$

Echilibrul corpurilor de rostogolire este determinat de o bucla de iteratie Newton-Raphson pentru vectorul de deplasare a centrelor corpurilor de rostogolire:

$$\{\vec{v}\} = \begin{Bmatrix} u_r \\ u_q \\ u_z \end{Bmatrix} \quad (2)$$

Pentru un vector  $\{\vec{v}\}$  dat și utilizând ipoteza de nedefomabilitate a corpurilor de rostogolire și a secțiunii inelelor, ca și geometria rulmentului, se pot determina punctele de contact și deplasarea corpurilor solide. Când aceasta deplasare este superioară jocurilor, forțele și momentele rezultante în  $C_r$  pot fi determinate. Corpurile de rostogolire sunt deci supuse unor forțe de contact de ambele inele, iar forțele suplimentare se exprima prin:

$$\{\vec{R}\} = -\sum F_{ext} = - \begin{Bmatrix} F_r^{I_e}(v_r, v_q, v_z) \\ F_z^{I_e}(v_r, v_q, v_z) \\ M_n^{I_e}(v_r, v_q, v_z) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} F_r^{I_i}(v_r, v_q, v_z) \\ F_z^{I_i}(v_r, v_q, v_z) \\ M_n^{I_i}(v_r, v_q, v_z) \end{Bmatrix} \quad (3)$$

Metoda Newton-Raphson constă în a determina ca la fiecare iteratie, vectorul  $\{\Delta \vec{v}\}$  ca și vectorul forțelor suplimentare calculat pentru deplasările  $\{\vec{v}\} + \{\Delta \vec{v}\}$  să fie un vector nul. Pentru fiecare iteratie vectorul  $\{\Delta \vec{v}\}$  este evaluat în funcție de  $\{\vec{v}\}$  și de  $\{\vec{R}\}$  prin rezolvarea sistemelor liniare:

$$\left[ \frac{\partial \{\vec{R}\}}{\partial \{\vec{v}\}} \right]_{\vec{v}_i} \{\Delta \vec{v}\} = [K_t] \{\Delta \vec{v}\} = \{\vec{R}\} \quad (4)$$

unde  $[K_i]$  este matricea de rigiditate tangentială, asociată sistemului inele-corpuri de rostogolire calculată în punctul  $C_r$ . Ea se exprima ca suma matricelor de rigiditate tangentială asociată contactelor corpurilor de rostogolire cu inelul exterior și inelul interior:

$$[K_t]_i = \left[ - \frac{\partial \{F^{I_e}\}}{\partial \{\vec{v}\}} \right]_{\vec{v}_i} + \left[ - \frac{\partial \{F^{I_i}\}}{\partial \{\vec{v}\}} \right]_{\vec{v}_i} = [K_t^{I_e}]_{\vec{v}_i} + [K_t^{I_i}]_{\vec{v}_i} \quad (5)$$

Echilibrul corpurilor de rostogolire este atins când:

$$\|\Delta \vec{v}\| \leq \mathbf{e}_v \quad \|\vec{R}\| \leq \mathbf{e}_r$$

Datele caracteristice ale încărcării corpurilor de rostogolire: forțele la nivelul cailor de rulare a rulmentului umerilor, unghiurile de oscilație sau de contact sunt cunoscute.

### 3. Calculul matricii de rigiditate tangentiala între noduri

Calculul matricelor de rigiditate  $[K_t^{I_e}]$  și  $[K_t^{I_i}]$  definite anterior se face în sistemul de coordonate  $S_1$ . Ele leaga deplasările din planul radial ale centrului  $C_r$  al corpurilor de rostogolire de punctele  $C_r$  ale fiecărui inel. O matrice de rigiditate echivalenta poate fi definita între punctele  $C_r$  ale fiecărui inel:

$$[\bar{K}] = \begin{bmatrix} K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}_{6 \times 6} \quad (6)$$

utilizând relația:

$$[K]_{3 \times 3} = [K_t^{I_e}] [K_t^{I_e} + K_t^{I_i}]^{-1} [K_t^{I_i}] \quad (7)$$

Utilizarea matricii geometrice definita anterior permite exprimarea acestei matrice  $[\bar{K}]$  într-un sistem de referință „3D” -  $S_1$ , și definirea matricii de rigiditate elementara asociata corpurilor de rotatie între nodurile  $N_1$  și  $N_2$ :

$$\underbrace{[K_t^e]_{S_1}}_{12 \times 12} = {}^T [G] [\bar{K}] [G] \quad (8)$$

unde :

$$[G] = \begin{bmatrix} G_1 \dots & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 \dots & G_2 \end{bmatrix}_{6 \times 12} \quad (9)$$

Aceasta este matricea globala asociata matricelor altor corpuri de rostogolire și restului structurii înaintea rezolvării problemei de nonliniaritate.

### 4. Fortele aplicate de corpurile de rostogolire asupra nodurilor

În același mod, forțele aplicate de corpurile de rostogolire asupra nodurilor  $N_1$  și  $N_2$ , pot fi calculate în funcție de forțele aplicate asupra inelelor, în plan radial și evaluate în punctul  $C_r$ :

$$\begin{aligned} \underbrace{\{F^{N_1}\}_{S_1}}_{6 \times 1} &= {}^T \underbrace{[G_1]}_{6 \times 3} \underbrace{\{-F^{I_e}\}}_{3 \times 1} \\ \underbrace{\{F^{N_2}\}_{S_1}}_{6 \times 1} &= {}^T \underbrace{[G_2]}_{6 \times 3} \underbrace{\{-F^{I_i}\}}_{3 \times 1} \end{aligned} \quad (10)$$

Acești vectori de forțe elementare sunt asamblati cu vectorii de forțe suplimentare a problemei neliniare generale.

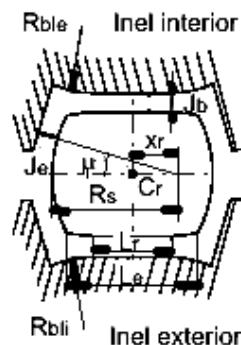


Figura 2. Parametrii geometrici ai rulmentului

Parametrii geometrici ai unor rulmenti cu role cilindrice si inele cu doi umeri prezentati în figura 2. sunt:

- $R_s$  - raza sferei exterioare maxime;
- $X_s$  - distanta de la centrul sferei exterioare maxime la centrul de rulare  $C_r$ ;
- $\mu^0$  - unghiul de contact a umerilor inelului;
- $R_{br}$  - raza de bombare a rolei;
- $R_{ble}$  - raza de bombare a inelului exterior;
- $R_{bli}$  - raza de bombare a inelului interior;
- $J_b$  - jocul initial inel-rola;
- $J_e$  - jocul initial rola-umar inel;
- $L_r$  - lungimea generatoarei rectilinii a caii de rulare;
- $L_e$  - lungimea efectiva de rulare.

În sistemul de referinta  $S_3$  legat de inelul exterior si pentru deplasările  $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$  si  $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$  date, rolele si inelul interior oscileaza. Consideram unghiul orientat  $A_e$  dintre axa inelului exterior si axa rulmentului, si unghiul orientat  $A_i$  între axa inelului interior si axa rolei, care vor fi definite în functie de componentele deplasărilor  $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$  si  $\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}$ :

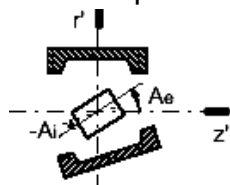


Figura 3. Deplasările dintre role si inele

În mod similar, putem defini unghiul  $\mu_i$ , asociat fiecarui umar al inelului exterior si interior, ca fiind unghiul efectiv între normala în punctul de contact si axa rolei.

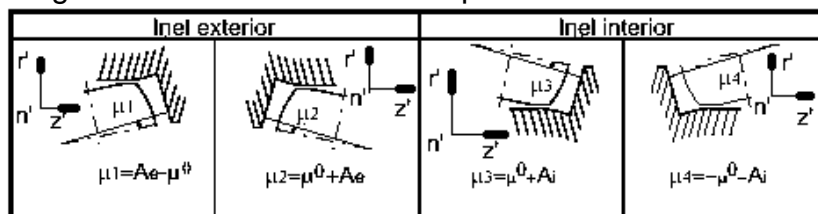


Figura 4. Unghiurile umerilor inelelor

## 5. Calculul fortelor care actioneaza între caile de rulare si role

Vor fi calculate numai fortele de pe directia  $r'$  în sistemul de coordonate  $S_3$ . Pe aceasta directie deplasările  $d_i$  si  $d_e$ , ale rolei în raport cu fiecare cale de rulare a rulmentului se exprima prin:

$$\mathbf{d}_i = u_r - v_r - J_b \quad \mathbf{d}_e = v_r - J_b \quad (11)$$

Când aceste valori sunt pozitive, exista contact între rola si calea de rulare a rulmentului. Calculul fortelor corespunzatoare se efectueaza prin împartirea în N zone de contact potential între role si caile de rulare. Aceasta discretizare se face simetric, în raport cu centrul  $C_r$  a rolelor:

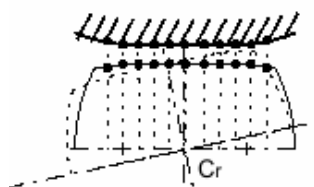


Figura 5. Discretizarea în raport cu centrul rolei

Pentru esantioane înguste și dese  $d_e$ , exprimate prin:

$$d_e = \frac{L_e}{N}$$

situate în jurul unui nod  $k$  de abscisa  $z_k$ , strivirea între cele două corpuri se exprima tinând cont de unghiul  $a^1$  de oscilație relativă a celor două corpuri și de eventualele raze de curbura, cu relația:

$$\Delta d = \mathbf{d} + \mathbf{a} z_k - h_k^1 - h_k^2 \quad (12)$$

unde  $h_k^i$  este un termen care ne permite să luăm în considerare eventuale curburi  $R_{ci}$  ale corpurilor  $i$ . Dacă punctul  $k$  se află în afara generatoarei rectiliniei, ceea ce înseamnă:

$$|z_k| \geq \frac{L_r}{2}$$

și avem o curbura, termenul  $h_k^i$  se exprima prin:

$$h_k^i = R_{ci} - \sqrt{R_{ci} - \left(z_k - \frac{L_r}{2}\right)^2} \quad (13)$$

iar în alte cazuri este nul.

Fortele de contact se exprima după teoria lui Hertz pentru domenii înguste prin:

$$Q_k = C_f (\Delta d)^{\frac{10}{9}} d_e \quad (14)$$

Aceste forțe generează un moment în punctul  $C_r$ :

$$M_k = Q_k z_k \quad (15)$$

Fortele și momentele cu care acționează caile de rulare ale rulmentului asupra rotelor vor fi:

$$Q_I = \sum_{k=1}^N Q_k \quad M_I = \sum_{k=1}^N M_k \quad (16)$$

În concluzie,  $Q_{Ie}(v_r, v_q, v_z)$  și  $M_{Ie}(v_r, v_q, v_z)$  sunt forțele și momentele care acționează asupra rotelor în punctul  $C_e$ , datorate inelului exterior, iar  $Q_{Ii}(v_r, v_q, v_z)$  și  $M_{Ii}(v_r, v_q, v_z)$  datorate inelului interior.

## 6. Calculul forțelor din umerii inelelor

Directiile efective de contact între extremitățile rotelor și umerii inelelor au fost prezentate în figura 2. De-a lungul acestor direcții, jocul dintre rola și umarul  $i$  se exprima în funcție de jocul inițial  $J_e$ , de unghiul de contact în gol  $\mu^o$ , de unghiul de contact sub încărcătură  $\mu_i$  și de distanța  $X_s$  prin:

$$\tilde{J}_i = J_e + X_s (\cos \mathbf{m}_i - \cos \mathbf{m}^o) \quad (17)$$

Apropierea dintre umeri și rola de-a lungul direcției de contact se exprima prin:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_1 &= v_z \cos \mathbf{m}^o + v_r \sin \mathbf{m}^o - \tilde{J}_1 \\ \mathbf{d}_2 &= -v_z \cos \mathbf{m}^o + v_r \sin \mathbf{m}^o - \tilde{J}_2 \\ \mathbf{d}_3 &= -(u_z - v_z) \cos(\mathbf{m}^o - u_q) + (u_r - v_r) \sin(\mathbf{m}^o - v_q) - \tilde{J}_3 \\ \mathbf{d}_4 &= (u_z - v_z) \cos(\mathbf{m}^o - u_q) + (u_r - v_r) \sin(\mathbf{m}^o - v_q) - \tilde{J}_4 \end{aligned} \quad (18)$$

Când  $d_i$  este pozitiv, exista contact între rola si umarul  $i$ , iar efortul rezultant  $Q_{Ei}$  dirijat de-a lungul normalei în contact se exprima prin legea lui Hertz pentru un contact punctual prin:

$$Q_{Ei}(v_r, v_q, v_z) = C_{ep} (d_i)^{3/2} \quad (19)$$

si momentul rezultant în  $C_r$  prin:

$$M_{Ei} = -Q_{Ei} X_S \sin m_i \quad (20)$$

Ecuatiile de echilibru si matricele Jacobiene ale sistemului rola-inel se scriu, în sistemul de coordonate  $S_3$  tinând cont de forta centrifuga  $F_c$  si de momentul giroscopic  $M_g$  care se exercita asupra rolei:

$$F_r(v_r, v_q, v_z) = \underbrace{-Q_{Ie} - Q_{E2} \sin m^o - Q_{E1} \sin m^o}_{Ie/rola} + \underbrace{Q_{Ii} - Q_{E4} \sin(m^o + u_q) - Q_{E3} \sin(m^o - u_q)}_{Ii/rola} + F_c = \quad (21)$$

$$= F_r^{Ie}(v_r + v_q + v_z) + F_r^{Ii}(v_r + v_q + v_z) + F_c$$

$$F_z(v_r, v_q, v_z) = \underbrace{Q_{E2} \cos m^o - Q_{E1} \cos m^o}_{Ie/rola} + \underbrace{Q_{E4} \cos(m^o + u_q) - Q_{E3} \cos(m^o - u_q)}_{Ii/rola} = \quad (22)$$

$$= F_r^{Ie}(v_r + v_q + v_z) + F_r^{Ii}(v_r + v_q + v_z)$$

$$M_q(v_r, v_q, v_z) = \underbrace{-M_{Ie} - M_{E2} - M_{E1}}_{Ie/rola} + \underbrace{M_{Ii} - M_{E4} - M_{E3}}_{Ii/rola} = \quad (23)$$

$$= M_q^{Ie}(v_r + v_q + v_z) + M_q^{Ii}(v_r + v_q + v_z) + M_g$$

Necunoscutele problemei sunt  $v_r, v_q, v_z$ . Matricele de rigiditate tangentiala asociate contactelor inel exterior-rola si inel interior-rola sunt matricele Jacobiene asociate relatiilor forte-deplasare, exprimate prin:

$$[K_t^{Ie}] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r^{Ie}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_r^{Ie}}{\partial v_q} & \frac{\partial F_r^{Ie}}{\partial v_z} \\ \frac{\partial M_q^{Ie}}{\partial v_r} & \frac{\partial M_q^{Ie}}{\partial v_q} & \frac{\partial M_q^{Ie}}{\partial v_z} \\ \frac{\partial F_z^{Ie}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_z^{Ie}}{\partial v_q} & \frac{\partial F_z^{Ie}}{\partial v_z} \end{bmatrix} \quad [K_t^{Ii}] = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_r^{Ii}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_r^{Ii}}{\partial v_q} & \frac{\partial F_r^{Ii}}{\partial v_z} \\ \frac{\partial M_q^{Ii}}{\partial v_r} & \frac{\partial M_q^{Ii}}{\partial v_q} & \frac{\partial M_q^{Ii}}{\partial v_z} \\ \frac{\partial F_z^{Ii}}{\partial v_r} & \frac{\partial F_z^{Ii}}{\partial v_q} & \frac{\partial F_z^{Ii}}{\partial v_z} \end{bmatrix} \quad (24)$$

### Bibliografie:

1. Bard, C., Remond, D. & Play, D., Une technique originale de mesure de l'erreur de transmission dans des conditions réelles de fonctionnement, Journée d'information 'des engrenages plus silencieux', Centre d'Etudes Techniques des Industries Mécaniques (CETIM), Senlis, 21-22oct.1993, p6
2. Bathe, K.J., Finite Element procedures in engineering analysis, Englewood cliffs, New Jersey USA, Prentice Hall, 1982, p735
3. Pater, s., Analiza semnalelor de zgomote si vibratii în vederea detectarii surselor, Teza de doctorat, Timisoara, iunie, 2003.