

MODELAREA TRANSMISIEI CUTIILOR DE VITEZA

Sorin PATER, Tudor MITRAN, Ion BRATU

Universitatea din ORADEA

Résumé:

L'idée retenue, qui permet une modélisation globalisante des réducteurs a engrenages, consiste a assimiler l'engrenage a un couple de cylindres rigides, lies par un raideur d'engrènement représentant les contributions de l'ensemble des parties déformables.

În figura 1. este reprezentat modelul dinamic al transmisiei automobilului pentru determinarea sollicitarilor la cuplarea treptelor.

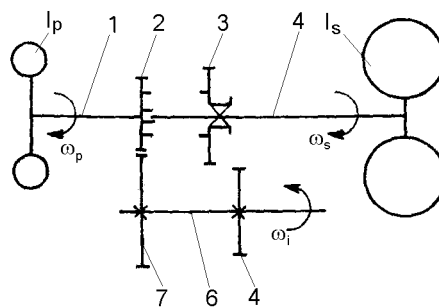


Figura 1. Modelul dinamic al transmisiei

La cuplarea celor doua sisteme ce se rotesc cu viteze unghiulare diferite si poseda o mare inertie, apar forte percutante foarte mari, deoarece angrenarea, prin egalarea instantanee a vitezelor tangențiale a pinioanelor este similara cu o ciocnire între doua corpuri rigide. Actiunea fortelor percutante care intervin într-o ciocnire se exprima cu ajutorul percutiei P .

Pentru determinarea percutiei care actioneaza asupra arborelui secundar, la intrarea în angrenare a pinioanelor 3 si 4, se porneste de la relatia cunoscuta $M_i = I_s \cdot d\omega/dt$. Prin înlocuirea momentului $M_i = Fr_3$ se obtine $Fr_3 dt = I_s dw$. Daca se integreaza aceasta expresie, în ipoteza ca sub actiunea momentului M_i viteza unghiulara a arborelui secundar creste de la ω_s pâna la ω'_s , se obtine:

$$r_3 \int_{t_1}^{t_2} F dt = I_s (\omega'_s - \omega_s) \quad (1)$$

în care:

$$P = \int_{t_1}^{t_2} F dt \text{ - percutia}$$

F – forta percutanta care actioneaza asupra danturii;

r_3 – raza cercului de divizare a rotii 3

Rezulta, deci, pentru arborele secundar relatia:

$$P \cdot r_3 = I_s (\omega'_s - \omega_s) \quad (2)$$

Pentru a scrie o relatie asemanatoare pentru arborele intermediar, trebuie redus la acest arbore momentul de inertie I_p . Notând cu I_i momentul de inertie redus la arborele intermediar, din conditia egalitatii energiei cinematice $I_i \cdot \omega_i^2 / 2 = I_p \cdot \omega_p^2 / 2$, rezulta $I_i = I_p \cdot \omega_p^2 / \omega_i^2$.

Cunoscând momentul de inertie I_i , se poate scrie o relatie analoga si pentru arborele intermediar:

$$P' \cdot r_4 = I_p \cdot \frac{w_p^2}{w_i^2} (w_i - w_i') \quad (3)$$

în care:

$\omega_i = \omega_p \cdot r_2 / r_7$ este viteza unghiulara a arborelui intermediar înainte de intrarea în angrenare a rotilor;

$w_i' = w_s' \cdot r_3 / r_4$ este viteza unghiulara a arborelui intermediar dupa angrenarea rotilor.

Daca se tine seama ca percutiile P si P' sunt egale, din relatiile (2) si (3) rezulta viteza unghiulara w_s' :

$$w_s' = \frac{I_p w_p i_{cvi} + I_s w_s}{I_p i_{cvi}^2 + I_s} \quad (4)$$

în care:

$i_{cvi} = r_7 / r_2 \cdot r_3 / r_4$ este raportul de transmitere dintre arborii primar si secundar.

Înlocuind pe w_s' în relatia (2), rezulta momentul percutiei care apare la schimbarea treptelor:

$$P \cdot r_3 = \frac{I_p I_s i_{cvi} (w_s - i_{cvi} w_s')}{I_p i_{cvi}^2 + I_s} \quad (5)$$

Din analiza relatiei (5), rezulta ca momentul percutiei este direct proportional cu diferenta $(w_p - i_{cvi} w_s')$. Pentru a micsora socul care apare la cuplarea rotilor, trebuie ca aceasta diferenta sa fie cât mai mica sau egala cu zero. În cazul cutiilor de viteze, reducerea diferentei dintre vitezele unghiulare se obtine prin utilizarea cutiilor de viteze cu sincronizatoare sau utilizarea dublei debreieri.

Considerând ca treapta cu raportul de transmitere i_{cvi} se cupleaza în procesul de demarare al automobilului, atunci înainte de angrenarea pinioanelor 3 si 4, când cutia de viteze se afla în treapta $i-1$, între vitezele unghiulare ale arborelui primar si arborelui secundar exista relatia:

$$w_p = w_s i_{cvi-1} \quad (5')$$

în care:

i_{cvi-1} este raportul de transmisie al cutiei de viteze în treapta $i-1$, care a precedat treapta i care se cupleaza.

De asemenea, momentul de inertie I_p redus la arborele secundar va deveni $I_s' = I_p i_{cvi}^2$.

Tinând seama de relatiile lui I_s' si ω_p , momentul percutiei devine:

$$P \cdot r_3 = \frac{I'_s I_s w_s}{I'_s + I_s} \left(\frac{i_{cvi-1}}{i_{cvi}} - 1 \right) \quad (6)$$

Din analiza relatiei (6), rezulta urmatoarele:

- momentul percutiei (socul), care actioneaza asupra dintilor pinioanelor care se cupleaza, este cu atît mai mare cu cît viteza unghiulara a arborelui secundar w_s este mai mare;
- momentul percutiei este cu atît mai mare cu cît raportul dintre rapoartele de transmitere a doua trepte vecine este mai mare.

2. MODELAREA ELEMENTELOR CUTIILOR DE VITEZA

Sunt prezentate modelele globale de analiza a mecanismelor de transmitere cu roti dintate si metodele de analiza a acestora. Aceste mecanisme considerate au un comportament nelinier, iar analiza statica este etapa prealabila pentru studiile dinamice realizata prin liniarizarea comportamentului în jurul punctului de functionare.

Mecanismele de transmisie de putere sunt formate din structuri cu comportament linier (arbori, carcasa,...) si de elemente de legatura cu comportament nelinier (rulmenti, angrenaje,...). Modelarea trebuie sa tina cont de aceste caracteristici.

Tehnicile prezentate în acest capitol se refera la modelarea elementelor componente ale unei cutii de viteze de autoturism.

2.1. Modelarea statica si dinamica a angrenajelor cilindrice exterioare

Elementele angrenajelor cilindrice exterioare sunt permanent unite prin intermediul unei matrice de rigiditate între un nod de pe arborele de intrare si un nod de pe arborele de iesire . Elementele angrenajelor cilindrice exterioare sunt prezentate în figura 2.

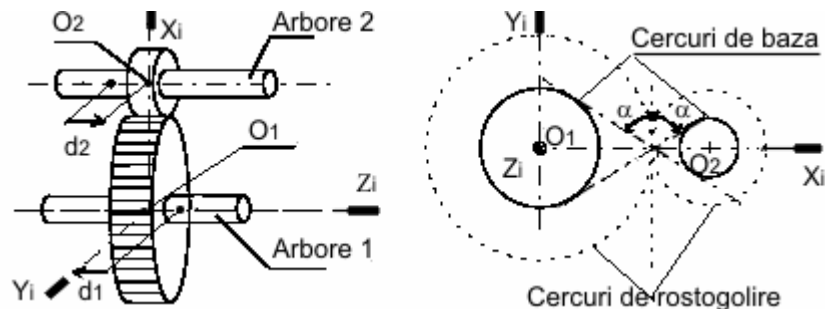


Figura 2 Elementele angrenajelor

Pentru modelele dinamice, nodurile N_1 si N_2 corespund centrelor pinioanelor ($d_1=d_2=0$). În functie de încarcarea statica aplicata putem considera doua configuratii de angrenare diferite, corespunzatoare contactului dintre profilurile rotilor dintate (fig.3).

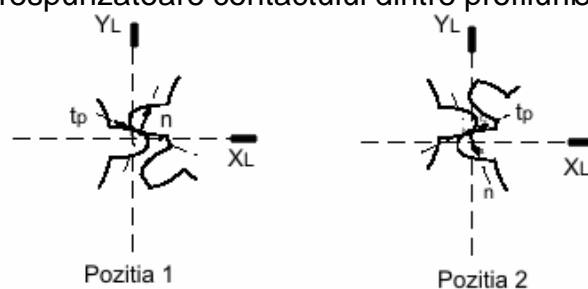


Figura 3. Contactul dintre profilul dintilor

Pentru fiecare pozitie de angrenare se poate defini un sistem de referinta legat de aceasta pozitie conform figurii 4.

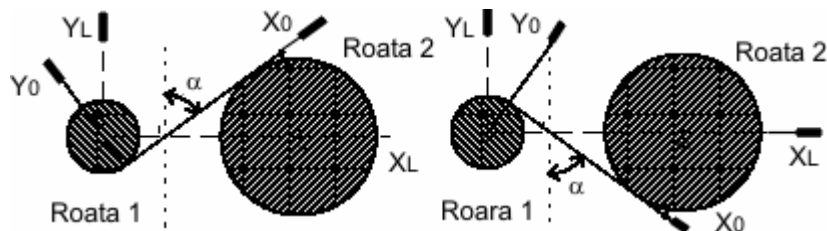


Figura 4. Sistemul de referinta pentru cele doua pozitii

Ipoteza de modelare statica si dinamica presupune asimilarea pinioanelor cu solide nedeformabile, cu exceptia punctelor situate pe normala punctelor de contact. Cunoasterea deplasarilor generalizate a nodurilor de legatura a elementelor în angrenare, în sistemul de coordonate $R_0(X_0, Y_0, Z_0)$, permite calcularea deplasarilor punctelor primitive de angrenare. Vectorii de deplasare si de rotatie ai nodurilor N_i , în sistemul R_0 , vor fi:

$$\left\{ \overrightarrow{dep}(N_i) \right\}_{R_0} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} \quad \left\{ \overrightarrow{rot}(N_i) \right\}_{R_0} = \begin{Bmatrix} rx_i \\ ry_i \\ rz_i \end{Bmatrix} \quad (7)$$

Putem calcula deplasarile punctelor primitive de angrenare pentru fiecare pinion:

$$\left\{ \overrightarrow{dep}(I \in S_i) \right\}_{R_0} = \left\{ \overrightarrow{dep}(N_i) \right\}_{R_0} + \left\{ \overrightarrow{IN}_i \right\} \times \left\{ \overrightarrow{rot}(N_i) \right\}_{R_0} \quad (8)$$

stiind ca:

$$\left\{ \overrightarrow{IN}_i \right\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{m} \\ \mathbf{I}_i \\ -d_i \end{Bmatrix} \quad (9)$$

unde d_i este distanta algebrica N_iO_i masurata pe axa Z_0 .

Valorile coeficientilor μ_i si γ_i depind de modul de angrenare din figura 2:

$$\begin{cases} \mathbf{m}_1 = -R_{b1} \cdot \text{tg } \alpha \\ \mathbf{m}_2 = R_{b2} \cdot \text{tg } \alpha \\ \mathbf{I}_1 = R_{b1} \\ \mathbf{I}_2 = -R_{b2} \end{cases} \quad \begin{cases} \mathbf{m}_1 = -R_{b1} \cdot \text{tg } \alpha \\ \mathbf{m}_2 = R_{b2} \cdot \text{tg } \alpha \\ \mathbf{I}_1 = -R_{b1} \\ \mathbf{I}_2 = R_{b2} \end{cases} \quad (10)$$

Deplasarile punctelor primitive de angrenare se exprima prin:

$$\left\{ \overrightarrow{dep}(I \in S_i) \right\} = \begin{Bmatrix} u_i + \mathbf{I}_i + d_i ry_i \\ v_i - d_i rx_i - \mathbf{m}_i rz_i \\ w_i + \mathbf{m}_i ry_i - \mathbf{I}_i rx_i \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Expresia normalei de contact în sistemul R_0 , depinde de modul de angrenare si de valorile unghiului elicei de baza β_b . Transformarea pentru modelul static si dinamic este legata doar de sensul elicei rotii 1. Daca elicea rotii 1 este la dreapta, unghiul elicei (β) este negativ, iar daca este la stânga, el este pozitiv. Normala la profilul de contact a rotii 1 exprimata în sistemul de coordonate R_0 este:

$$\{\vec{n}_1\}_{R_0} = \begin{Bmatrix} \cos b \\ 0 \\ \sin b \end{Bmatrix} \quad \{\vec{n}_1\}_{R_0} = \begin{Bmatrix} \cos b \\ 0 \\ -\sin b \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Strivirea dintelui poate fi scrisa sub forma:

$$\Sigma = \{\overrightarrow{dep}(I \in S_1)\}_{\{\vec{n}_1\}} - \{\overrightarrow{dep}(I \in S_2)\}_{\{\vec{n}_1\}} \quad (13)$$

Deci, vectorul de deplasare generalizata $\{Q\}$ a nodurilor atasate elementului angrenajului cilindric exterior va fi:

$$\{Q\}_{R_0} = {}^T \{u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad rx_1 \quad ry_1 \quad rz_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad w_2 \quad rx_2 \quad ry_2 \quad rz_2\} \quad (14)$$

Strivirea dintelui mai poate fi scrisa sub forma:

$$\Sigma = {}^T \{s\} \{Q\}_{R_0} \quad (15)$$

unde:

$${}^T \{s\} = \{\cos(b) \quad 0 \quad \sin(b) \quad -I \sin(b) \quad m \sin(b) + d_1 \quad I \cos(b) \quad -\cos(b) \quad 0 \quad -\sin(b) \quad \sin(b)\} \quad (16)$$

2..2. Matricea de rigiditate echivalenta

Linia de angrenare este modelata printr-un resort de rigiditate k^0 , positionat pe normala comuna în punctul de contact. Energia potentiala pierduta în acest element se exprima prin:

$$E_p = \frac{1}{2} k^0 \Sigma^2 = \frac{1}{2} k^0 ({}^T \{s\} \{Q\}_{R_0})^2 = \frac{1}{2} k^0 \{Q\}_{R_0} \{s\}^T \{s\} \{Q\}_{R_0} = \frac{1}{2} k^0 \{Q\}_{R_0} [K_{ang}] \{Q\}_{R_0} \quad (17)$$

Matricea $[K_{ang}]$ este matricea de rigiditate echivalenta a elementelor angrenajului cilindric exterior exprimat în sistemul de coordonate R_0 , prin :

$$[K_{ang}] = k^0 \{s\}^T \{s\} \quad (18)$$

3. Fortele exterioare echivalente la o excitatie dinamica

Introducerea unei excitatii datorate erorilor de transmisie, prin intermediul unei forte exterioare, consta în modelarea eforturilor produse asupra danturii de catre acestea. În cadrul modelului global prezentat anterior, linia de angrenare poate fi schematizata printr-un arc si un amortizor montate în paralel între punctul I_1 corespunzator rotii unu si punctul I_2 corespunzator rotii a doua, conform figurii 5:

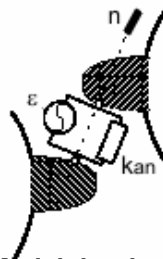


Figura 5. Modelul redus de angrenare

Marimea e poate fi determinata prin studiu cvasistatic si depinde de contactul corpurilor. Aceasta marime va genera o forta exterioara $\{\vec{F}(I_1)\}$ asupra rotii unu si $\{\vec{F}(I_2)\}$

asupra rotii a doua, aplicata în punctele I_1 si I_2 situate pe normala comuna în punctul de contact:

$$\begin{aligned} \{\overline{F}(I_1)\}_{R_0} &= \mathbf{e}(t)\{\overline{n}\}_{R_0} \\ \{\overline{F}(I_2)\}_{R_0} &= -\mathbf{e}(t)\{\overline{n}\}_{R_0} \end{aligned} \quad (19)$$

Rotile se considera nedeformabile si putem calcula torsorul fortelor echivalente aplicate în polurile angrenarii care sunt noduri comune:

$$\begin{aligned} \{\overline{F}(O_i)\}_{R_0} &= \{\overline{F}(I_i)\}_{R_0} \\ \{\overline{M}(O_i)\}_{R_0} &= \{\overline{O_i I_i}\}_{R_0} \times \{\overline{F}(O_i)\}_{R_0} \end{aligned} \quad (20)$$

Aceste expresii ale torsorilor pot fi exprimate într-un sistem de referinta al elementelor de angrenare definit anterior. Coordonatele vectorilor $\{\overline{n}\}$, în sistemul de referinta R_0 , au fost definite anterior în functie de modul de angrenare.

Vectorii $\{\overline{O_1 I_1}\}$ si $\{\overline{O_2 I_2}\}$ se exprima în sistemul de referinta R_0 cu relatiile:

$$\begin{aligned} \{\overline{O_1 I_1}\}_{R_0} &= \begin{Bmatrix} R_{b1} \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ -R_{b1} \\ 0 \end{Bmatrix} & \{\overline{O_2 I_2}\}_{R_0} &= \begin{Bmatrix} -R_{b2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ R_{b2} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

pentru pozitia 1 de angrenare, si pentru pozitia 2 cu:

$$\begin{aligned} \{\overline{O_1 I_1}\}_{R_0} &= \begin{Bmatrix} R_{b1} \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ R_{b1} \\ 0 \end{Bmatrix} & \{\overline{O_2 I_2}\}_{R_0} &= \begin{Bmatrix} -R_{b2} \cdot \operatorname{tg} \alpha \\ -R_{b2} \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (22)$$

Bibliografie:

1. Boyes, J.D. Analysis Technique for Gearbox-Diagnosis Using the High Resolution FFT Analyses, Briel & Kjaer, Application Notes, nr.106, 1981.
2. Bratu, I., Rus, Al., Pater, S., Determinarea sarcinii dinamice la angrenajele cilindrice, Anale. Mecanică, Univ. Oradea, 1998, p.(233-238).
3. Pater, s., Analiza semnalelor de zgomote si vibratii în vederea detectarii surselor, Teza de doctorat, Timisoara, iunie, 2003.