

CONTRIBUTII PRIVIND CINEMATICA PISTONULUI UNUI MOTOR MONOCILINDRIC TINÂND SEAMA DE VIBRATIILE DE TORSIUNE FORTATE ALE ARBORELUI COTIT

Gheorghe PANAIT

Universitatea Petro-Gaze din Ploiesti

Cuvinte cheie: arbore cotit, deformatie, acceleratie, moment de torsiune, model dinamic

Dans cet ouvrage on présent l'influence des vibrations de torsion forcées de l'arbre coudé linéaire-élastiques sur les paramètres cinématiques du piston d'un moteur monocylindrique, en considérant rigides la bielle et le piston.

On adopte un modèle dynamique pour des vibrations forcées de l'arbre coudé (manivelle) et on déterminent les relations de calcul pour la course, la vitesse et accélération du piston tenant compte de déformation élastique de torsion de l'arbre coudé.

In lucrarea [6] se prezinta expresiile matematice ale cursei $s(\varphi)$, vitezei $v(\varphi)$, acceleratiei $a(\varphi)$, pentru pistonul mecanismului biela-manivela, considerând toate elementele cinematice din structura sa rigide, fig.1.

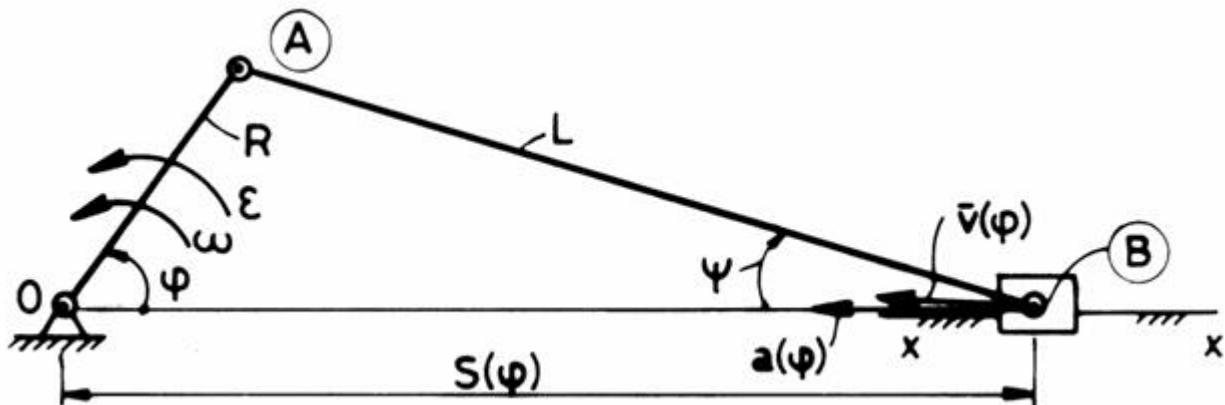


Fig.1. Parametri cinematici ai mecanismului biela-manivela

Se cunosc:

ω – viteza unghiulara a manivelei OA;

ϵ – acceleratia unghiulara a manivelei OA;

L - lungimea bielei AB;

R – lungimea manivelei OA;

La momentul t, pentru unghiul de manivela φ , parametrii cinematici ai pistonului

sunt:

-cursa pistonului $s(\varphi)$:

$$S(\varphi) = R(A_0 + A_1 \cos \varphi + A_2 \cos 2\varphi + A_4 \cos 4\varphi + A_6 \cos 6\varphi \dots) \quad (1)$$

-viteza pistonului $v(\varphi)$:

$$V(\varphi) = -R\omega(A_1 \sin \varphi + 2A_2 \sin 2\varphi + 4A_4 \sin 4\varphi + 6A_6 \sin 6\varphi \dots) \quad (2)$$

-acceleratia pistonului $a(\varphi)$:

$$a(j) = -R\omega^2(A_1 \cos j + 4A_2 \cos 2j + 16A_4 \cos 4j + 36A_6 \cos 6j \dots) - R\epsilon(A_1 \sin j + 2A_2 \sin 2j + 4A_4 \sin 4j + 6A_6 \sin 6j \dots) \quad (3)$$

unde:

$$A_0 = -\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} - \frac{3\lambda}{64} - \frac{5\lambda^5}{256}$$

$$A_1 = 1$$

$$A_2 = -\frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda^3}{16} + \frac{15\lambda^5}{512} + \dots \quad (4)$$

$$A_4 = -\left(\frac{I^3}{64} + \frac{3I^5}{256} + \dots\right)$$

$$A_6 = -\frac{\lambda^5}{512} + \dots$$

unde $\lambda = \frac{R}{L} = \frac{1}{2.5} \dots \frac{1}{5}$ pentru motoare.

Practic, se neglijeaza termenii la puterea a treia si mai mari, pentru λ si se obtin relatiile:

$$S(\varphi) \cong R\left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} + \cos \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi\right) \quad (5)$$

$$V(\varphi) \cong -R\omega\left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi\right) \quad (6)$$

$$a(\varphi) \cong -R\omega^2\left(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi - R\varepsilon\left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi\right)\right) \quad (7)$$

Pentru faza de regim se poate considera ω aproximativ constant, deci $\varepsilon=0$; si se obtin relatiile aproximative pentru $s(\varphi), v(\varphi)$ si $a(\varphi)$ ale pistonului, care se folosesc si în practica:

$$S(\varphi) \cong R\left(-\frac{1}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} + \cos \varphi + \frac{\lambda}{4} \cos 2\varphi\right) \quad (8)$$

$$V(\varphi) \cong -R\omega\left(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2} \sin 2\varphi\right) \quad (9)$$

$$a(\varphi) \cong -R\omega^2\left(\cos \varphi + \lambda \cos 2\varphi\right) \quad (10)$$

În continuare se tine cont de proprietatile linear - elastice ale arborelui cotit (manivela), având constanta elastica la torsiune k . Se considera în continuare biela si pistonul rigide.

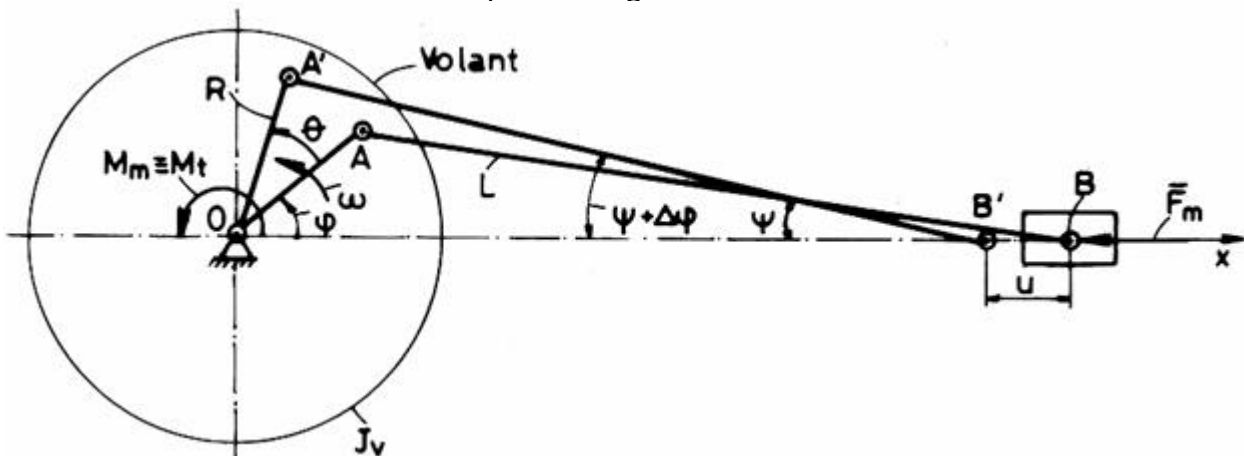


Fig.2. Arborele cotit deformat elastic

În această ipoteză, la momentul t , arborele cotit (manivela) are o deformare elastică de torsiune $\theta(t)$, în raport cu situația de rigid, fig.2. Acest unghi de deformare elastică este variabil și este dat de momentul de torsiune $M_t \equiv M_m$ și este generat de forța motrică \bar{F}_m .

Pentru calculul deplasării elastice, se utilizează triunghiurile OAB și OA'B'. Cu ajutorul teoremei sinusurilor se obține:

$$\sin \psi = \frac{R}{L} \cdot \sin \varphi = \lambda \sin \varphi \quad (11)$$

$$\text{și} \quad \sin(\psi + \Delta\psi) = \frac{R}{L} \sin(\theta + \varphi) = \frac{\sin(\theta + \varphi) \sin \psi}{\sin \varphi} \quad (12)$$

unde $\Delta\psi$ este foarte mic.

Se dezvoltă $\sin(\psi + \Delta\psi)$ și $\sin(\theta + \varphi)$, se fac aproximațiile:

$$\sin \Delta\psi \approx \Delta\psi; \quad \cos \Delta\psi \approx 1; \quad \sin \theta \approx \theta; \quad \cos \theta \approx 1$$

și se obține:

$$\Delta\psi \approx \frac{\sin \psi \cos \theta}{\cos \psi \sin \theta} \cdot \theta \quad (13)$$

Rezultă ca:

$$U = OB - OB' = R \cos \varphi + L \cos \psi - R \cos(\theta + \varphi) - L \cos(\psi + \Delta\psi) \quad (14)$$

Prin dezvoltarea termenilor $\cos(\theta + \varphi)$ și $\cos(\psi + \Delta\psi)$ luând în considerare aproximațiile făcute mai sus, se obține:

$$U = R\theta \cdot \frac{\sin(\varphi + \psi)}{\cos \psi} \quad (15)$$

Prin transformări elementare și ținând seama de relația:

$$\cos \psi = \sqrt{1 - \sin^2 \psi} = \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \quad (16)$$

Se obține:

$$U \cong R\theta \cdot \sin \varphi \left(1 + \frac{\lambda \cos \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}} \right) \quad (17)$$

Conform [6] se poate dezvolta expresia $\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}$,

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi} \cong 1 - \frac{1}{2} \lambda^2 \sin^2 \varphi \quad (18)$$

Relația (17) ia forma:

$$U = R\theta \cdot \left(\sin \varphi + \frac{1\lambda \sin 2\varphi}{4 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos 2\varphi} \right) = R\theta \cdot A(\varphi) \quad (19)$$

unde:

$$A(\varphi) = \sin \varphi + \frac{2\lambda \sin 2\varphi}{4 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos 2\varphi} \quad (20)$$

Se derivează relația (19) în raport cu timpul și se obține viteza pistonului corespunzătoare deformării elastice a arborelui cotit (manivelei):

$$\dot{U} = R\dot{\theta} \cdot A(\varphi) + R\theta \cdot \dot{A}(\varphi) \quad (21)$$

Prin derivarea relației în raport cu timpul se obține accelerația pistonului datorită deformării elastice a arborelui cotit:

$$\ddot{U} = R\ddot{\theta} \cdot A(\varphi) + R\dot{\theta} \cdot \dot{A}(\varphi) + R\dot{\theta} \cdot \dot{A}(\varphi) + R\theta \cdot \ddot{A}(\varphi) \quad (22)$$

unde:

$$\dot{A}(\varphi) \cong \omega \cdot \left[\cos \varphi + \frac{4\lambda(4 - \lambda^2) \cos 2\varphi + 4\lambda^3}{(4 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos 2\varphi)^2} \right] \quad (23)$$

$$\ddot{A}(\varphi) \cong \omega^2 \cdot \left[-\sin \varphi + \frac{8\lambda(\lambda^4 + 16) \sin 2\varphi + 4\lambda^3(4 - \lambda^2) \sin 4\varphi}{(4 - \lambda^2 + \lambda^2 \cos 2\varphi)^3} \right] \quad (24)$$

Pentru calcularea derivatelor \dot{U} și \ddot{U} se considera $\omega = \text{constant}$, deci $\varepsilon = 0$ și se neglijează puterile lui λ mai mari de doi.

Având în vedere cele prezentate mai sus, rezulta că atunci când se ține seama de deformarea elastică a arborelui cotit (motor monocilindric), se schimbă parametrii cinematici ai pistonului față de situația conceptului de solid rigid.

Astfel, la momentul (t) parametrii cinematici ai pistonului unui motor monocilindric pentru $\omega = \text{constant}$ sunt:

-cursa pistonului: $S^*(\varphi)$,

$$S^*(\varphi) = S(\varphi) - U(\varphi) \quad (25)$$

-viteza pistonului: $V^*(\varphi)$,

$$V^*(\varphi) = V(\varphi) - \dot{U}(\varphi) \quad (26)$$

-accelerația pistonului: $a^*(\varphi)$,

$$a^*(\varphi) = a(\varphi) - \ddot{U}(\varphi) \quad (27)$$

unde: $S(\varphi)$, $V(\varphi)$, $a(\varphi)$ sunt date de relațiile (8), (9) și (10) iar U , \dot{U} , \ddot{U} sunt date de relațiile (19), (21) și (22).

Pentru calcularea marimilor: θ , $\dot{\theta}$ și $\ddot{\theta}$ se adoptă modelul recomandat în lucrarea [1] pentru vibrațiile de torsiune, combinat cu modelul vibrațiilor forțate de torsiune, recomandat în lucrările [4] și [5].

Acest model este format dintr-un arbore circular drept de diametru d , lungime l , cu constanta elastică la torsiune k , pe care se montează două discuri cu momentele de inerție J_1 , și J_2 în raport cu axa de rotație (fig.3):

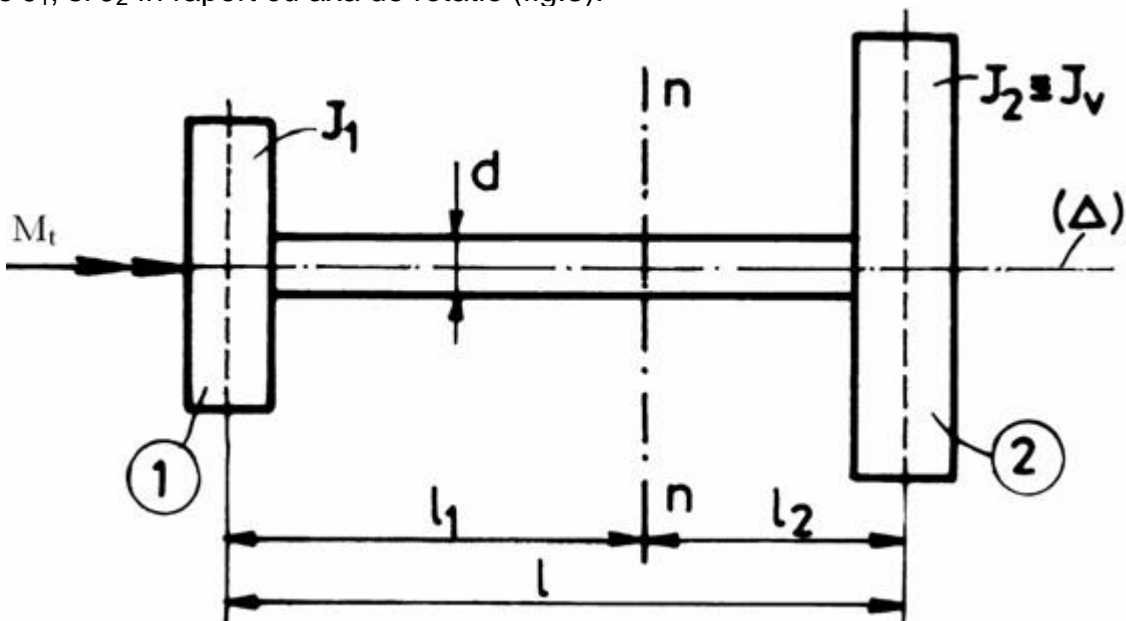


Fig.3. Modelul dinamic de lucru

Elementele geometrice ale modelului dinamic adoptat sunt:

$$J_1 = J_{\text{cot}} + m_{2A}R^2 + 0,5(m_3 + m_{2B})R^2 \quad (28)$$

unde: J_{cot} este momentul de inertie al cotului arborelui cotit în raport cu axa sa de rotatie (fig4);

m_3 -este masa pistonului;

m_{2A} ; m_{2B} -sunt masele rezultate din concentrarea statica a masei bieii în articulatiile A si B ale mecanismului, care se calculeaza astfel (fig5):

$$\begin{cases} m_{2A} + m_{2B} = m_2 \\ m_{2A} S_2 = m_{2B} (L - S_2) \end{cases} \quad (29)$$

$$m_{2A} = m_2 \frac{L - S_2}{L} \quad m_{2B} = m_2 \cdot \frac{S_2}{L}$$

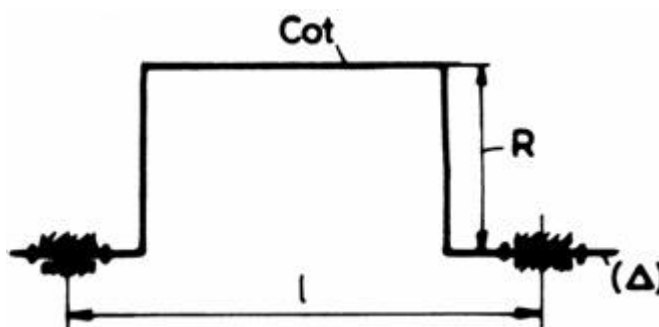


Fig. 4. Arborele cotit

d- diametrul fusurilor arborelui cotit;

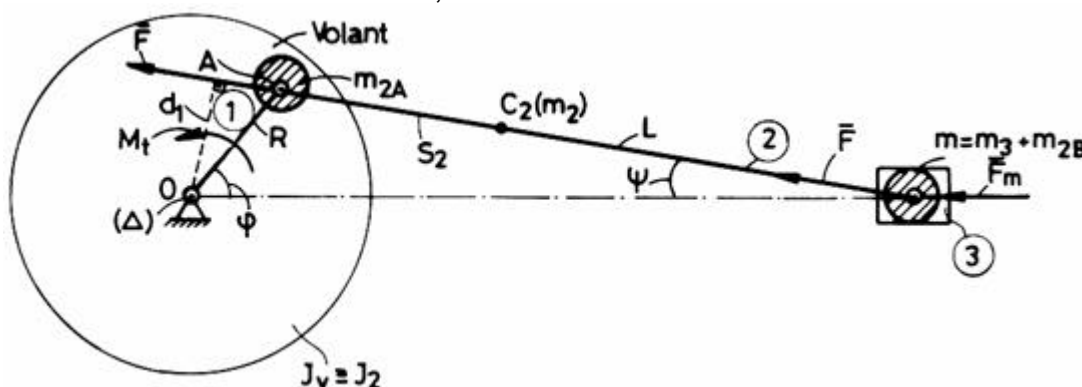


Fig.5. Concentrarea statica a maselor în articulatii

$J_2 = J_v$, iar momentul de torsiune M_t este momentul motor si se calculeaza astfel [1]:

$$M_t \equiv M_m = F \cdot d_1 = FR \sin(\varphi + \psi) \quad (30)$$

unde:

$$F = \frac{F_m}{\cos \psi} \quad (31)$$

$$\text{si} \quad F_m = F_p + F_{iB} = F_p + (-ma_B) = F_p + mR^2 (\cos \varphi + \cos 2\varphi) \quad (32)$$

cu $m = m_3 + m_{2B}$ - masele în miscare de translatie si F_p forta data de presiunea gazelor de combustie [1], data de relatia:

$$F_p = \frac{\pi D^2}{4} \cdot \Delta p \quad (33)$$

unde D este diametrul pistonului, iar $\Delta p = p - p_{cart}$, cu p -presiunea maxima a gazelor în cilindrul motorului la aprindere, iar $p_{cart} \approx 1 \frac{daN}{cm^2}$ este presiunea din galeria de evacuare.

Daca se tine seama de relatiile: (11), (18), (31) si (32), dupa calcule elementare se ajunge la urmatoarea relatie pentru calculul momentului de torsiune:

$$M_t = R \sin j \cdot [F_p + mRw^2 (\cos j + I \cos 2j)] \cdot \left(1 + \frac{I \cos j}{1 - I^2 + I^2 \cos 2j} \right) \quad (34)$$

cu $\varphi = \omega t$ si $\omega = \text{const}$

In conformitate cu lucrarile [1], [4] si [5], pulsatia proprie a modelului adoptat este data de relatia:

$$p = \sqrt{\frac{k(J_1 + J_2)}{J_1 \cdot J_2}} \quad (36)$$

unde constanta elastica la torsiune este data de relatia:

$$k = \frac{G I_p}{l} = \left(\frac{p d^4}{32} \right) \cdot \frac{G}{l} \quad (37)$$

unde G este modul de elasticitate transversal al materialului arborelui cotit.

Ecuatia vibratiilor fortate a modelului adoptat (fig3), în raport cu linia neutra (n-n) este:

$$\ddot{\theta} + p^2 \theta = \frac{M_t}{J} \quad (38)$$

unde J este dat de relatia:

$$J = \frac{J_1 \cdot J_2}{J_1 + J_2} \quad (39)$$

cu solutia:

$$\theta = C_1 \cos pt + C_2 \sin pt + \theta_0 \quad (40)$$

unde C_1 si C_2 sunt constante de integrare si θ_0 este o solutie particulara datorita lui $M_t(t)$.

Se încearca solutia particulara de forma:

$$\theta_0 = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (41)$$

pentru forma simplificata a momentului $M_t(t)$,

$$M(t) \approx A \sin \omega t + B \sin 2\omega t \quad (42)$$

unde:

$$A = R F_p ; \quad B = m R^2 \omega^2 \quad (43)$$

sunt constante cunoscute.

Cu ajutorul relatiei (42), ecuatia (38) devine:

$$\ddot{\theta} + p^2 \theta = \frac{A}{J} \sin \omega t + \frac{B}{J} \sin 2\omega t \quad (44)$$

Ecuatia (44) trebuie sa fie verificata de solutia particulara (41), de unde rezulta:

$$a = 0 \quad b = \frac{R F_p}{J(p^2 - \omega^2)} \quad (45)$$

prin urmare:

$$\theta_0 = \frac{R F_p}{J \cdot (p^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad (46)$$

Constantele C_1 si C_2 corespund vibratiilor libere ale modelului adoptat si se determina din conditiile initiale.

Se fac calculele si se obtine:

$$C_1 = 0 ; \quad C_2 = \frac{\omega}{p} \quad (47)$$

In concluzie, pentru ipotezele simplificatoare solutia generala a ecuatiei diferentiale (44) este:

$$\theta(t) = \frac{\omega}{p} \sin pt + \frac{R F_p}{J(p^2 - \omega^2)} \sin \omega t \quad (48)$$

cu:

$$\dot{\theta} = \omega \cdot \left[\cos pt + \frac{R F_p}{J \cdot (p^2 - \omega^2)} \cos \omega t \right] \quad (49)$$

$$\text{si } \ddot{q} = -wps \sin pt - \frac{RF_p w^2}{J \cdot (\rho^2 - w^2)} \sin wt$$

(50)

CONCLUZII

Pentru a studia cursa, viteza si acceleratia pistonului unui motor monocilindric, tinând seama de elasticitatea arborelui cotit (manivelei), se recomanda urmatorul algoritm de calcul:

1. Se calculeaza $\theta, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ cu relatiile (48);(49);(50);
2. Se determina $A(\varphi); \dot{A}(\varphi); \ddot{A}(\varphi)$ cu relatiile (20);(23);(24);
3. Se calculeaza U, \dot{U}, \ddot{U} cu relatiile (19);(21);(22);
4. Se calculeaza $S(\varphi), V(\varphi), a(\varphi)$ cu relatiile (8);(9);(10)
5. Se suprapun efectele si se calculeaza $S^*(\varphi), V^*(\varphi), a^*(\varphi)$ cu relatiile (25);(26);(27);

Din cele prezentate mai sus, rezulta urmatoarele aspecte mai importante:

- a) Cinematica pistonului unui mecanism biela-manivela este influentata foarte mult de elasticitatea arborelui cotit, ce imprima un caracter vibratoriu miscarii acestuia, cu consecinte negative asupra stabilitatii functionarii mecanismului;
- b) Se observa ca asupra marimilor: $S(\varphi), V(\varphi), a(\varphi)$ corespunzatoare conceptului de solid-rigid, se suprapun vibratii semnificative produse de deformatia elastica a arborelui cotit;
- c) Se poate concluziona ca stabilitatea cinematica a mecanismului biela-manivela este cu atât mai mare, cu cât rigiditatea arborelui cotit (manivelei) este mai mare.

BIBLIOGRAFIE

1. Berthold Grunwald - Teoria, calculul si constructia motoarelor pentru autovehicule rutiere, EDP, Bucuresti, 1980;
2. Buzdugan Gheorghe L. Fetcu, M. Rados - Vibratiile sistemelor mecanice, Editura Academiei Romane, Bucuresti, 1975;
3. Buzdugan Gheorghe, L. Fetcu, M. Rados - Vibratiile mecanice, EDP, Bucuresti, 1975;
4. Posea Nicolae - Vibratii mecanice, Institutul de Petrol si Gaze, Ploiesti, 1980;
5. Posea Nicolae - Calculul dinamic al structurilor, Editura Tehnica, Bucuresti, 1991;
6. Viorel-Handra Luca, s.a. - Introducere în teoria mecanismelor, vol.1, Editura Dacia Cluj-Napoca, 1982.