

## COMPORTAREA DINAMICA A UNUI ARBORE DREPT, AVAND SECTIUNEA CIRCULARA, PE CARE SE MONTEAZA LA JUMATATE UN DISC AVAND EXCENTRICITATE VARIABILA

Gheorghe PANAIT

Universitatea Petro-Gaze din Ploiesti

Cuvinte cheie: excentricitate, pulsatie, vâscoasa, vibratie, rezonanta

Dans cet ouvrage on étudie le comportement dynamique d'un disque avec l'excentricité variable, monté sur un arbre droit avec section circulaire. On écrit les équations de mouvement tenant compte de l'élasticité de l'arbre et de l'amortissement visqueuse. On détermine la solution générale et on tire en évidence le comportement du système dans sa phase transitoire et dans sa phase de régime. Finalement, on met en évidence quelques conclusions pratiques concernant ce problème.

Se considera un disc cu diametrul  $D$  si masa  $m$ , montat pe un arbore linear-elastic de diametru  $d$  si de lungime  $l$  între centrele cuplelor de rotatie, fig.1.a.

Se noteaza cu  $A$  centrul geometric al discului si cu  $C$  centrul sau de masa.

Discul are o excentricitate initiala  $e_0$ .

Arborele are o miscare de rotatie in jurul axei fixe  $O_1z_1 \equiv Oz$  cu o viteza unghiulara  $\omega$  constanta, deci acceleratia unghiulara  $\varepsilon=0$ .

La momentul  $t$ , arborele se deformeaza si discul ocupa pozitia din fig 1.b).

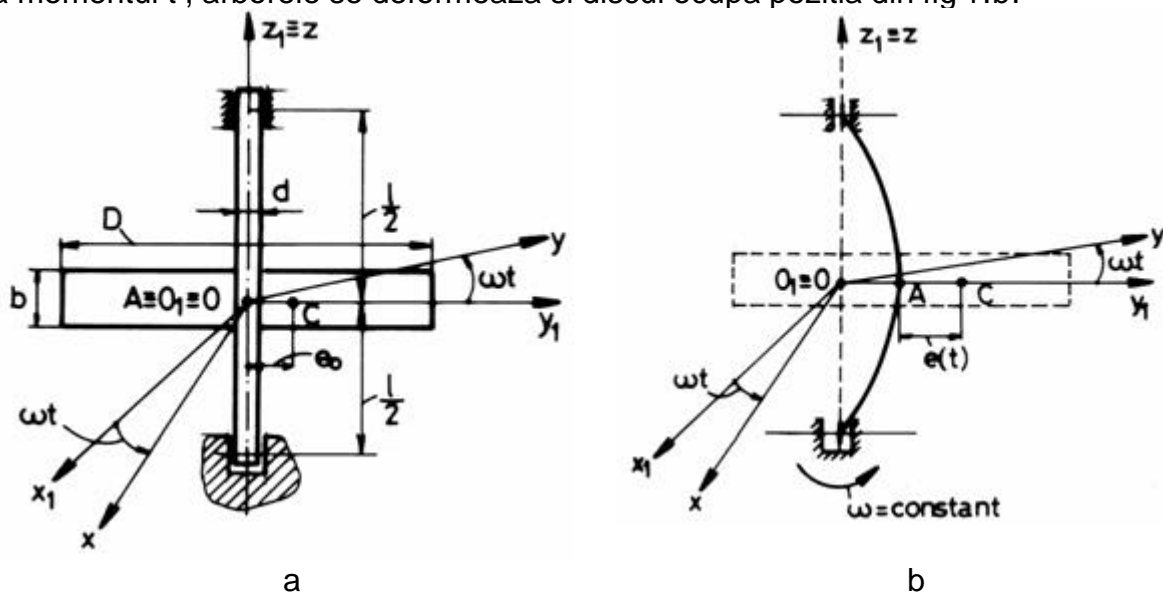


Fig.1. Discul în situația nedeformată a arborelui a) și deformată b).

Se face ipoteza ca excentricitatea  $AC$  este variabila în timp după legea:

$$e(t) = e_0 \cdot f(t) \quad (1)$$

unde  $f(t)$  este o funcție cu proprietatea  $f(0)=1$  și  $\Delta f = f_{\max} - f_{\min}$ , variația acestei funcții este finită.

Excentricitatea rotorului poate varia în timp prin variația distribuției masei, sau prin pierderea sau adăugarea unor particule de masă în mod aleator în timpul funcționării. De asemenea, se face ipoteza ca vibrațiile rotorului sunt cu amortizare vâscoasă.

Situația rotorului la momentul  $(t)$  este prezentată în plan, fig.2

Se studiaza miscarea discului în raport cu triedrul fix  $T_1(O_1, x_1, y_1, z_1)$ . Triedrul mobil  $T(O, x, y, z)$  este solidar cu discul.

Se studiaza vibratiile sistemului în doua faze:

1. Faza tranzitorie care este foarte scurta;
2. Faza vibratiilor stabilizate ( faza de regim).

### 1.FAZA TRANZITORIE

Ecuatia de miscare este data de teorema miscarii centrului de masa C al rotorului:

$$m\ddot{\bar{r}}_c = \bar{F}_e + \bar{F}_r \quad (2)$$

unde  $\bar{F}_e$  este forta de deformatie elastica, data de relatia:

$$\bar{F}_e = -k \cdot \bar{r} \quad (3)$$

iar  $\bar{F}_r$  este forta de rezistenta vâscoasa data de relatia :

$$\bar{F}_r = -c \cdot \bar{v}_A \quad (4)$$

unde k este constanta elastica a arborelui, data în acest caz de relatia:

$$k = \frac{48EI_z}{l^3} \quad (5)$$

cu  $I_z = \frac{\pi d^4}{64}$  si  $E = 2,1 \cdot 10^{11} \frac{N}{m^2}$  modulul de elasticitate al otelului, iar C este un coeficient de amortizare vâscoasa cu dimensiunea  $\frac{Ns}{m}$ .

Din fig. 2 rezulta:

$$\bar{r}_c = \bar{r}(t) + \bar{e}(t) \quad (6)$$

Se derivează relatia (6) în raport cu timpul si se obtine :

$$\dot{\bar{r}}_c = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r} + \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{e} \quad (7)$$

Viteza absoluta a centrului de masa .

Derivând relatia (7) în raport cu timpul se obtine:

$$\ddot{\bar{r}}_c = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} + \bar{e} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial t^2} + \bar{e} \times \bar{e} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{e}) + 2\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} \quad (8)$$

acceleratia absoluta a centrului de masa .

Daca se tine seama ca  $\omega = \text{constant}$ , rezulta ca  $\varepsilon = 0$ , atunci relatia (8) devine:

$$\ddot{\bar{r}}_c = \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial t^2} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{e}) + 2\bar{\omega} \times \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} \quad (9)$$

Viteza absoluta a centrului geometric al rotorului este data de relatia :

$$\bar{v}_A = \dot{\bar{r}} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{\omega} \times \bar{r} \quad (10)$$

Se introduc relatiile (3), (4), (9) si (10) în ecuatia (2) si se obtine:

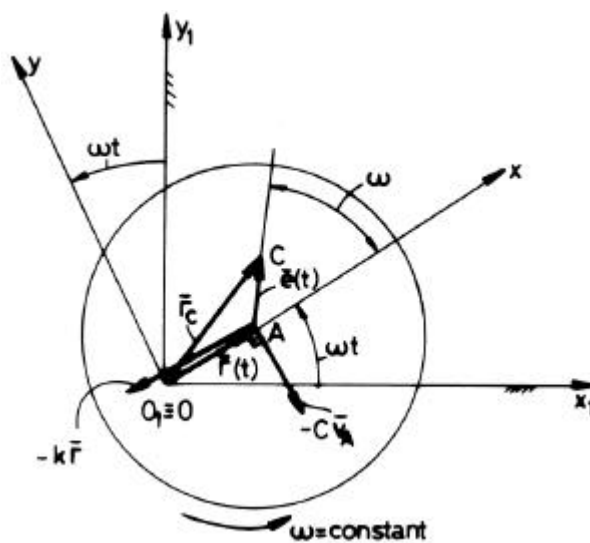


Fig. 2. Situatia rotorului în plan

$$m \cdot \left[ \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial t^2} + \bar{\omega}x(\bar{\omega}x\bar{r}) + 2\bar{\omega}x \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{e}}{\partial t^2} + \bar{\omega}x(\bar{\omega}x\bar{e}) + 2\bar{\omega}x \frac{\partial \bar{e}}{\partial t} \right] = -k\bar{r} - c \left( \frac{\partial \bar{r}}{\partial t} + \bar{\omega}x\bar{r} \right) \quad (11)$$

Se proiecteaza relatia (11) pe axele Ox si Oy si se obtine:

$$m(\ddot{x} - x\omega^2 + \frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} - e_x\omega^2 - 2\omega \frac{\partial e_y}{\partial t}) = -c\dot{x} - kx \quad (12)$$

$$m \left( 2\dot{x}\omega + \frac{\partial^2 e_y}{\partial t^2} + 2\omega \frac{\partial e_y}{\partial t} - e_y\omega^2 \right) = -cx\omega \quad (13)$$

Se împart relatiile (12) si (13) la masa m a rotorului, se fac notatiile :

$$\frac{k}{m} = p^2 \quad (14)$$

unde p este pulsatia proprie si

$$\frac{c}{m} = 2pv \quad (15)$$

unde v se numeste factor de amortizare vâscoasa definit prin relatia  $v = C/C_r$ , unde  $C_{cr}$  este coeficientul de amortizare critic. In continuare se trateaza cazul  $C < C_r$ , Se obtine:

$$\ddot{x} + 2pv\dot{x} + (p^2 - \omega^2)x = e_x\omega^2 + 2\omega \frac{\partial e_y}{\partial t} - \frac{\partial^2 e_x}{\partial t^2} \quad (16)$$

si

$$2\dot{x}\omega + 2pv \cdot x = \omega^2 e_y - 2\omega \frac{\partial e_x}{\partial t} - \frac{\partial^2 e_y}{\partial t^2} \quad (17)$$

Ecuatiile (16) si (17) modeleaza vibratiile sistemului studiat în faza tranzitorie.

Din fig. 2 se observa ca:

$$e_x = e \cos \alpha \quad \text{si} \quad e_y = e \sin \alpha \quad (18)$$

In continuare se face ipoteza ca  $\alpha \equiv \text{constant}$ . Daca se tine seama de relatia (18) , relatiile (16) si (17) devin:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2pv\dot{x} + (p^2 - \omega^2)x = \omega^2 e \cos \alpha + 2\omega \frac{\partial e}{\partial t} \sin \alpha - \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \cos \alpha \\ 2\dot{x}\omega + 2pv\omega x = \omega^2 e \sin \alpha - 2\omega \frac{\partial e}{\partial t} \cos \alpha - \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} \sin \alpha \end{cases} \quad (19)$$

In continuare se face ipoteza :

$$e(t) = e_0(\cos \omega t + \sin \omega t); \quad \omega t \in [0, 2\pi] \quad (20)$$

Se fac calculele si se obtin ecuatiile:

$$\ddot{x} + 2pv\dot{x} + (p^2 - \omega^2)x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad \text{si} \quad (21)$$

$$2\dot{x}\omega + 2pv\omega \cdot x = -B \cos \omega t + A \sin \omega t \quad (22)$$

unde:

$$\begin{cases} A = 2e_0\omega^2(\sin\alpha + \cos\alpha) \\ B = 2e_0\omega^2(\cos\alpha - \sin\alpha) \end{cases} \quad (23)$$

În lucrările [5] și [7] se prezintă rezolvarea ecuației de forma (21), cu soluția generală:

$$x(t) = a_1 e^{-vpt} \cos\left[\sqrt{(p^2 - \omega^2) - (pv)^2} \cdot t - \varphi_1\right] + a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (24)$$

cu  $\omega t \in [0, 2\pi]$ .

Se observă că mișcarea sistemului este formată din două vibrații suprapuse: vibrația proprie (primul termen) și una forțată. Vibrația proprie este amortizată.

Exponentul  $e^{-vpt}$  descrește foarte repede către zero, deci se poate neglija vibrația proprie după un interval scurt de timp. Practic prezintă interes vibrația forțată a sistemului, data de relația:

$$x(t) \approx a \cos \omega t + b \sin \omega t = a_0 \cos(\omega t - \varphi) \quad (25)$$

$$\text{cu } \omega t \in [0, 2\pi], \text{ unde: } a_0 = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (26)$$

Coeficienții  $a$ ,  $b$ , se determină din condiția ca soluția dată de relația (25) să verifice ecuația diferențială (21).

Pentru aceasta se derivatează succesiv relația (25) în raport cu timpul și se obține:

$$\dot{x}(t) = -a\omega \sin \omega t + b\omega \cos \omega t \quad \ddot{x}(t) = -a\omega^2 \cos \omega t - b\omega^2 \sin \omega t \quad (27)$$

Înlocuind expresiile  $x(t)$ ,  $\dot{x}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$  în (21) și punând condiția ca aceasta să fie identic satisfăcută, obținem:

$$a = \frac{A(p^2 - 2\omega^2) - 2pv\omega B}{(p^2 - 2\omega^2)^2 + (2pv\omega)^2} \quad b = \frac{2pv\omega A + B(p^2 - 2\omega^2)}{(p^2 - 2\omega^2)^2 + (2pv\omega)^2} \quad (28)$$

Tinând seama de relațiile (23) și (28), introduse în relația (26), se fac calculele și se obține:

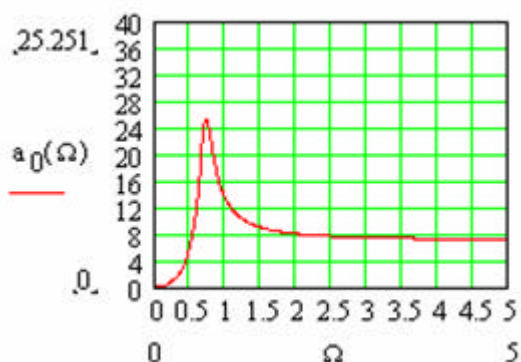


Fig.3. Variația amplitudinii vibrației forțate

$$a_0 = \frac{2\sqrt{2}e_0\omega^2}{\sqrt{(p^2 - 2\omega^2)^2 + (2pv\omega)^2}} = \frac{2\sqrt{2}e_0 \frac{\omega^2}{p^2}}{\sqrt{\left(1 - 2\frac{\omega^2}{p^2}\right)^2 + 4v^2 \frac{\omega^2}{p^2}}} \quad (29)$$

Graficul de variație al amplitudinii forțate în funcție de  $w/p = \Omega$  și  $n = 0,2$  este prezentat în fig.3.

Unghiul  $\varphi$  din relația (25) se calculează astfel:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a} = \frac{C + D \cdot \operatorname{tg} \alpha}{-D + C \cdot \operatorname{tg} \alpha} \quad (30)$$

unde s-au făcut notațiile:

$$C = p^2 - 2\omega^2 + 2pv\omega \quad \text{și} \quad D = 2pv\omega - p^2 + 2\omega^2$$

Relația (30) se mai poate scrie și sub forma:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\left(1 - 2\frac{\omega^2}{p^2}\right)(1 - \operatorname{tg} \alpha) + 2v \frac{\omega}{p}(1 + \operatorname{tg} \alpha)}{\left(1 - 2\frac{\omega^2}{p^2}\right)(1 + \operatorname{tg} \alpha) - 2v \frac{\omega}{p}(1 - \operatorname{tg} \alpha)} \quad (31)$$

In concluzie, vibratia fortata a sistemului este data de solutia:

$$x(t) \approx \frac{2\sqrt{2}e_0\omega^2}{\sqrt{(p^2 - 2\omega^2)^2 + (2pv\omega)^2}} \cdot \cos(\omega t - \varphi) = \frac{2\sqrt{2}e_0 \frac{\omega^2}{p^2}}{\sqrt{(1 - 2\frac{\omega^2}{p^2})^2 + 4v^2 \frac{\omega^2}{p^2}}} \cdot \cos(\omega t - \varphi) \quad (32)$$

cu  $\omega t \in [0, 2\pi]$ .

## 2.FAZA VIBRATIILOR STABILIZATE

Aceste vibratii sunt date de relatia (32). In aceasta faza se calculeaza unghiul  $\alpha$  cu ajutorul ecuatiilor (19) unde se face  $\ddot{x} = 0$  si  $\dot{x} = 0$  si se obtine :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2pv\omega \cdot \frac{\partial^2 e}{\partial t^2} - 2pv\omega^3 e - 4pv\omega^2 \cdot \frac{\partial e}{\partial t}}{4pv\omega^2 \cdot \frac{\partial e}{\partial t} - (p^2 - \omega^2)(\omega^2 e - \frac{\partial^2 e}{\partial t^2})} \quad (33)$$

Daca în relatia (33) se face  $e = \text{constant}$  se obtine:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2v \cdot \frac{\omega}{p}}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}} \quad (34)$$

cunoscuta în literatura de specialitate : [5], [6], [7].

Daca se tine seama de relatia (20), relatia (33) devine:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha &= \frac{4pv\omega}{[2pv\omega + (p^2 - \omega^2)] \cdot \operatorname{tg} \omega t + (p^2 - \omega^2) - 2pv\omega} = \\ &= \frac{4v \cdot \frac{\omega}{p}}{2v \cdot \frac{\omega}{p} (\operatorname{tg} \omega t - 1) + (1 - \frac{\omega^2}{p^2})(\operatorname{tg} \omega t + 1)} \end{aligned} \quad (35)$$

La rezonanta pentru  $\omega = 0$ , relatia (35) devine:

$$(\operatorname{tg} \alpha)_{\text{rez}} = \frac{2}{\operatorname{tg} \omega t - \operatorname{tg} \pi/4} = \frac{\sqrt{2} \cdot \cos \omega t}{\sin(\omega t - \pi/4)} \quad (36)$$

iar amplitudinea vibratiilor fortate  $a_0$  tinde catre o valoare finita data de relatia:

$$(a_0)_{\text{rez}} = \frac{2\sqrt{2}e_0}{\sqrt{1 + 4v^2}} \quad (37)$$

ceea ce înseamna ca  $x(t)$  la rezonanta tinde catre o valoare finita, nu infinita. De asemenea, la rezonanta, unghiul  $\varphi_{\text{rez}}$  este dat de relatia:

$$(\operatorname{tg} \varphi)_{\text{rez}} = \frac{(2v - 1) \cdot \operatorname{tg} \omega t + 2v + 3}{-(2v + 1) \cdot \operatorname{tg} \omega t + 6v - 1} \quad (38)$$

cu  $\omega t \in [0, 2\pi]$ .

Din relatia (29) se observa ca amplitudinea  $a_0$  a vibratiilor fortate are o valoare finita pentru cazurile practice  $\omega < p$  si  $\omega > p$ .

Pentru turatii foarte mari, adica atunci când  $\omega \rightarrow \infty$  amplitudinea devine:

$$\begin{aligned} \lim_{w \rightarrow \infty} a_0 &= \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2}e_0 w^2}{\sqrt{(p^2 - 2w^2)^2 + (2pnw)^2}} = \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2}e_0 w^2}{\sqrt{p^4 - 4p^2 w^2 + 4w^4 + 4p^2 n^2 w^2}} = \\ &= \lim_{w \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{2}e_0}{\sqrt{\frac{p^4}{w^4} - \frac{4p^2}{w^2} + 4 + \frac{4p^2 n^2}{w^2}}} \end{aligned} \quad (39)$$

Fenomenul de autocentrare se produce atunci când  $\omega \rightarrow \infty$  si  $\cos(\omega t - \varphi) = -1$ , de unde rezulta ca  $\omega t - \varphi = \pi$  si faza  $\varphi = \omega t - \pi$ , iar  $x \rightarrow -\sqrt{2}e_0$ .

## CONCLUZII :

1. Atunci când excentricitatea discului este variabila vibratiile libere se amortizeaza rapid, iar vibratiile fortate se stabilizeaza si sunt date de relatia (32) de forma cosinusoidală.

2. Amplitudinea vibratiilor fortate este finita pentru toate cazurile de interes practic:  $\omega < p$ ;  $\omega = p$ ;  $\omega > p$ , datorita amortizarii vâscoase caracterizata prin factorul de amortizare  $\nu$ ;

3. Unghiul  $\alpha$  dintre directia axei Ox si AC fig.2, este variabil într-un domeniu finit;

4. Atunci când viteza unghiulara de regim este foarte mare  $\omega \rightarrow \infty$ , se obtine o amplitudine a vibratiilor fortate finita, data de relatia (39).

5. Fenomenul de autocentrare se produce atunci când  $\omega \rightarrow \infty$ ,  $\cos(\omega t - \varphi) = -1$ ,  $\varphi = \omega t - \pi$ , iar  $x \rightarrow -\sqrt{2}e_0$ ;

6. Important este faptul ca în toate situatiile de interes practic, amplitudinea vibratiilor fortate este finita chiar si la rezonanta când  $\omega = p$ , relatia (37).

## BIBLIOGRAFIE

1. Andrei Ripianu - Miscarile vibratorii ale arborilor drepti si cotiti. Editura Academiei Române, Bucuresti, 1969.
2. Gh. Silas, M. Radoi, s.a. - Culegere de probleme de vibratii mecanice ,vol. 2, Editura Tehnica, Bucuresti, 1973.
3. Gh. Buzdugan , L. Fetcu, M.Rados - Vibratii mecanice , E.D.P. , Bucuresti, 1979.
4. M.Radoi, E. Deciu ,D. Voiculescu - Elemente de vibratii mecanice, Editura Tehnica, Bucuresti, 1973.
5. N. Posea - Calculul dinamic al structurilor, Editura Tehnica, Bucuresti, 1991.
6. N. Posea - Vibratii mecanice, I.P.G. Ploiesti, 1980.
7. Radu P. Voinea, s.a. - Mecanica, E.D.P. Bucuresti, 1983.