

MODEL MATEMATIC PENTRU STABILIREA REGIMULUI DE SALT OPTIM A UNUI VIBRATOR ELECTROMAGNETIC

Mircea HORGOS, Dinu STOICOVICI

Universitatea de Nord Baia Mare, mhorgos@ubm.ro

Key words: grain, sieve, throw coefficient, (optimum regim) the best system

Abstract: This paper presents the differential equations which characterize the movement of the sieve with material on it, and its movement without material, as well as the equations that describe the flight of a grain of material. With the help of these equations the graphs of the three curvatures are drawn in order to study from a qualitative point of view the jumps of the grains as related to the movement of the mobile frame.

1. CONSIDERAȚII TEORETICE

Vom considera un vibrator electromagnetic, având sitele înclinate cu unghiul α față de orizontala locului, cu axele xO_1y ale sistemului de coordonate mobil solidar cu sita ciurului (axa Ox orientată în lungul sitei) și cu axele $\xi O\eta$ ale sistemului fix de coordonate, ca în figura 1 de mai jos:

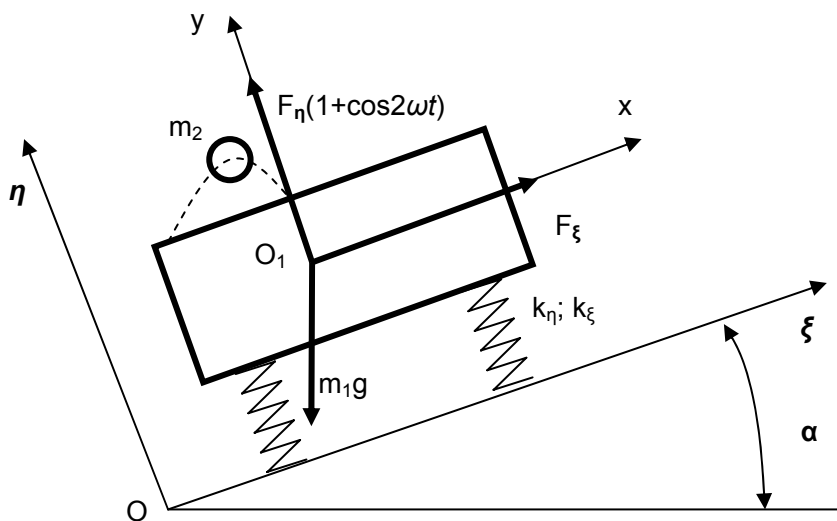


Fig. 1: Sistemul fix și mobil de axe de referință

Vom aborda cazul regimului cu un singur salt al granulei de material la o perioadă de oscilație ale forței perturbatoare, caz similar cu cel din figura 2 din prima lucrare. De asemenea, se consideră în continuare aceleași tipuri de intervale, simbolizate cu "I" pentru momentele când materialul se află pe sită și se mișcă solidar cu aceasta și simbolizate cu "II" pentru momentele când materialul se află în salt de pe sită.

2. STABILIREA MODELULUI MATEMATIC

Astfel, pentru cazul din figura de mai sus vom avea ecuația diferențială a mișcării în intervalul I după cum urmează:

$$\ddot{\eta} + \frac{k_{\eta}}{m_1 + m_2} \cdot \eta = \frac{F_{\eta}}{m_1 + m_2} \cdot (1 + \cos \omega t) - g \cdot \cos \alpha \quad (1)$$

Se fac următoarele notații:

$$z = \frac{m_1 \cdot \omega_1^2}{F_{\eta}} \cdot \eta; \quad z' = \frac{dz}{d\tau}; \quad \tau = \omega t; \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{k_{\eta}}{m_1}}; \quad (2)$$

$$k_1 = \frac{\omega_1}{\omega}; \quad k_m = \frac{m_2}{m_1}; \quad n_1 = \frac{m_1 \cdot g \cdot \cos \alpha}{F_{\eta}}$$

Cu aceste notații ecuația de mai sus devine:

$$z'' + \frac{k_1^2}{1 + k_m} \cdot z = \frac{k_1^2}{1 + k_m} \cdot (1 + \cos 2\tau) - k_1^2 \cdot n_1 \quad (3)$$

Soluția acestei ecuații este de forma:

$$z_I = A_I \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\sqrt{1 + k_m}} \cdot \tau\right) + B_I \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\sqrt{1 + k_m}} \cdot \tau\right) - \frac{k_1^2}{4 + 4 \cdot k_m - k_1^2} \cdot \cos 2\tau + 1 - n_1 \cdot (1 + k_m) \quad (4)$$

Pentru determinarea coeficienților A_I și B_I punem condiția inițială ca în momentul $\tau_0 = \omega t_0$ sistemul să posede o accelerație egală și de sens contrar cu componenta accelerației gravitaționale pe direcția "O η " și anume:

$$\begin{aligned} z_1''(\tau_0) &= -A_I \cdot \frac{k_1^2}{1 + k_m} \cdot \sin\left(\frac{k_1 \cdot \tau_0}{\sqrt{1 + k_m}}\right) - B_I \cdot \frac{k_1^2}{1 + k_m} \cdot \cos\left(\frac{k_1 \cdot \tau_0}{\sqrt{1 + k_m}}\right) + \frac{4k_1^2}{4 + 4k_m - k_1^2} \cdot \cos 2\tau = \\ &= -\frac{g \cdot \cos \alpha \cdot m_1 \cdot \omega_1^2}{F_{\eta} \cdot \omega^2} \end{aligned} \quad (5)$$

În final, ținând cont de notațiile (2), avem:

$$z_I''(\tau_0) = -k_1^2 \cdot n_1 \quad (6)$$

Mișcarea sitei după desprinderea materialului la momentul τ_0 este dată de ecuația:

$$\ddot{\eta} + \frac{k_{\eta}}{m_1} \cdot \eta = \frac{F_{\eta}}{m_1} \cdot (1 + \cos 2\omega t) - g \cdot \cos \alpha \quad (7)$$

Se adoptă din nou notațiile din (2), și vom obține noua ecuație de forma:

$$z'' + k_1^2 \cdot z = k_1^2 \cdot (1 + \cos 2\tau) - k_1^2 \cdot n_1 \quad (8)$$

Soluția acestei ecuații este de forma:

$$z_{II} = A_{II} \cdot \sin(k_1 \cdot \tau) + B_{II} \cdot \cos(k_1 \cdot \tau) - \frac{k_1^2}{4 - k_1^2} \cdot \cos 2\tau + 1 - n_1 \quad (9)$$

Constantele din (9) se vor determina ulterior din condițiile de continuitate a mișcării. Accelerația mișcării materialului după desprinderea de pe sită, exprimată direct în mărimi adimensionale, este:

$$z_S'' = A_{II} \cdot k_1^2 \cdot \sin(k_1 \cdot \tau) + B_{II} \cdot k_1^2 \cdot \cos(k_1 \cdot \tau) - \frac{4k_1^2}{4 - k_1^2} \cdot \cos 2\tau - k_1^2 \cdot (1 - n_1) \quad (10)$$

Prin integrarea de două ori se obțin viteza de deplasare și deplasarea granulei în salt, ținând cont de condiția inițială $z_s(\tau_0) = 0$:

$$z'_s = -A_{II} \cdot k_1 \cdot [\cos(k_1 \cdot \tau) - \cos(k_1 \cdot \tau_0)] + B_{II} \cdot k_1 \cdot [\sin(k_1 \cdot \tau) - \sin(k_1 \cdot \tau_0)] - \frac{2k_1^2}{4 - k_1^2} \cdot (\sin 2\tau - \sin 2\tau_0) - k_1^2 \cdot (1 - n_1) \cdot (\tau - \tau_0) + z'_{s0} \quad (11)$$

$$z_s = A_{II} \cdot k_1 \cdot (\tau - \tau_0) \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_0) - B_{II} \cdot k_1 \cdot (\tau - \tau_0) \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_0) - \frac{2k_1^2}{4 - k_1^2} \cdot (\tau - \tau_0) \cdot \cos 2\tau_0 - A_{II} \cdot [\sin(k_1 \cdot \tau) - \sin(k_1 \cdot \tau_0)] - B_{II} \cdot [\cos(k_1 \cdot \tau) - \cos(k_1 \cdot \tau_0)] + \frac{k_1^2}{4 - k_1^2} \cdot (\cos 2\tau - \cos 2\tau_0) - \frac{k_1^2 \cdot (1 - n_1) \cdot (\tau - \tau_0)^2}{2} + z'_{s0} \cdot (\tau - \tau_0) \quad (12)$$

unde, prin z'_{s0} s-a notat viteza inițială relativă a granulei față de suportul vibrator în momentul desprinderii.

Relațiile (4), (9) și (12) descriu saltul granulei de material până în momentul căderii acesteia înapoi pe sită $\tau_c = \omega t_c$, moment caracterizat prin cea mai mică rădăcină pozitivă a ecuației $z_s(t) = 0$.

Pentru determinarea condițiilor inițiale ale mișcării vom considera în primul rând că în momentul ciocnirii vitezele materialului și a suportului se vor modifica brusc, astfel încât în momentul imediat de după ciocnire - τ_c^* - vom avea noile viteze:

- Viteza sitei:
$$z'_{II}(\tau_c^*) = z'_2(\tau_c) - \frac{k_m}{1 + k_m} \cdot (1 + R) \cdot [-z'_s(\tau_c)] \quad (13)$$

- Viteza granulei:
$$z'_s(\tau_c^*) = z'_2(\tau_c) + z'_s(\tau_c) + \frac{1}{1 + k_m} \cdot (1 + R) \cdot [-z'_s(\tau_c)] \quad (14)$$

În formulele de mai sus R reprezintă coeficientul de restituire la șoc, definit în [4]. Pentru cazul ciocnirii perfect plastice luat în considerare în paragraful anterior, $R = 0$ și este satisfăcută condiția de accelerație (6), atunci sita va avea aceeași viteză cu granula și anume:

$$z'_{II}(\tau_c^*) = z'_2(\tau_c) + \frac{k_m}{1 + k_m} \cdot z'_s(\tau_c) \quad (15)$$

În continuare vom scrie sistemul de ecuații pentru determinarea constantelor de integrare, astfel:

a) Condiția de continuitate a spațiului în momentul τ_0 , momentul desprinderii granulei de pe sită, când ordonata cadrului mobil cu material trebuie să fie identică cu cea a acestuia funcționând în gol, respectiv z_I - ecuația (4) și z_{II} - ecuația (9), particularizate pentru τ_0 :

$$A_I \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\sqrt{1 + k_m}} \cdot \tau_0\right) + B_I \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\sqrt{1 + k_m}} \cdot \tau_0\right) - \frac{k_1^2}{4 + 4k_m - k_1^2} \cdot \cos 2\tau_0 - n_1 \cdot (1 + k_m) = A_{II} \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_0) + B_{II} \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_0) - \frac{k_1^2}{4 - k_1^2} \cdot \cos 2\tau_0 + 1 - n_1 \quad (16)$$

b) Condiția de continuitate a spațiului în momentul τ_c , momentul căderii granulei pe sită, când ordonata cadrului mobil funcționând în gol trebuie să fie identică cu cea a acestuia cu material, adică z_I - ecuația (4) și z_{II} - ecuația (9), particularizate pentru τ_c :

$$A_I \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\sqrt{1+k_m}} \cdot (\tau_c - 2 \cdot \pi \cdot p)\right) + B_I \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\sqrt{1+k_m}} \cdot (\tau_c - 2 \cdot \pi \cdot p)\right) - \frac{k_1^2}{4+4k_m-k_1^2} \cdot \cos 2\tau_c +$$

$$+ 1 - n_1 \cdot (1+k_m) = A_{II} \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_c) + B_{II} \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_c) - \frac{k_1^2}{4-k_1^2} \cdot \cos 2\tau_c + 1 - n_1$$
(17)

c) Condiția de continuitate a vitezele cadrului mobil în momentul τ_0 , adică z'_I - prima derivată a ecuației (4) și z'_{II} - prima derivată a ecuației (9):

$$A_I \cdot \frac{k_1}{\sqrt{1+k_m}} \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\sqrt{1+k_m}} \cdot \tau_0\right) - B_I \cdot \frac{k_1}{\sqrt{1+k_m}} \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\sqrt{1+k_m}} \cdot \tau_0\right) + \frac{2k_1^2}{4+4k_m-k_1^2} \cdot \sin 2\tau_0 =$$

$$= A_{II} \cdot k_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_0) - B_{II} \cdot k_1 \cdot \sin k_1 \cdot \tau_0 + \frac{2k_1^2}{4-k_1^2} \cdot \sin 2\tau_0$$
(18)

d) Relația dintre vitezele cadrului mobil în momentul căderii τ_c , adică derivatele z'_I ; z'_{II} înlocuite în (15):

$$A_I \cdot \frac{k_1}{\sqrt{1+k_m}} \cdot \cos\left(\frac{k_1}{\sqrt{1+k_m}} \cdot (\tau_c - 2 \cdot \pi \cdot p)\right) - B_I \cdot \frac{k_1}{\sqrt{1+k_m}} \cdot \sin\left(\frac{k_1}{\sqrt{1+k_m}} \cdot (\tau_c - 2 \cdot \pi \cdot p)\right) +$$

$$+ \frac{2k_1^2}{4+4k_m-k_1^2} \cdot \sin 2\tau_c =$$

$$= \frac{1}{1+k_m} \cdot \left[A_{II} \cdot k_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_c) - B_{II} \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_c) + \frac{2k_1^2}{4-k_1^2} \cdot \sin 2\tau_c \right] +$$

$$+ \frac{k_m}{1+k_m} \cdot \left[A_{II} \cdot k_1 \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_0) - B_{II} \cdot k_1 \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_0) - \frac{2k_1^2}{4-k_1^2} \cdot \sin 2\tau_0 - k_1^2 \cdot (1-n_1) \cdot (\tau_c - \tau_0) \right]$$
(19)

e) Condiția de egalitate a accelerațiilor la desprindere, respectiv relațiile (5) și (6):

$$-A_I \cdot \frac{k_1^2}{1+k_m} \cdot \sin\left(\frac{k_1 \cdot \tau_0}{\sqrt{1+k_m}}\right) - B_I \cdot \frac{k_1^2}{1+k_m} \cdot \cos\left(\frac{k_1 \cdot \tau_0}{\sqrt{1+k_m}}\right) + \frac{4k_1^2}{4+4k_m-k_1^2} \cdot \cos 2\tau_0 = -k_1^2 \cdot n_1$$
(20)

f) Condiția de egalitate cu zero pentru saltul granulei în momentul impactului cu sita a acesteia:

$$A_{II} \cdot k_1 \cdot (\tau_c - \tau_0) \cdot \cos(k_1 \cdot \tau_0) - B_{II} \cdot k_1 \cdot (\tau_c - \tau_0) \cdot \sin(k_1 \cdot \tau_0) - \frac{2k_1^2}{4-k_1^2} \cdot (\tau_c - \tau_0) \cdot \sin 2\tau_0 -$$

$$- A_{II} \cdot [\sin(k_1 \cdot \tau_c) - \sin(k_1 \cdot \tau_0)] - B_{II} \cdot [\cos(k_1 \cdot \tau_c) - \cos(k_1 \cdot \tau_0)] +$$

$$+ \frac{k_1^2}{4-k_1^2} \cdot (\cos 2\tau_c - \cos 2\tau_0) - \frac{k_1^2 \cdot (1-n_1) \cdot (\tau_c - \tau_0)^2}{2} = 0$$
(21)

Ecuatiile 16...21 alcătuiesc un sistem de șase ecuații ce permit determinarea celor șase necunoscute și anume A_I , A_{II} , B_I , B_{II} , τ_0 , τ_c .

3. PROGRAMUL DE CALCUL

Utilizând formulele (4), (9) și (15), se construiesc graficele celor trei curbe pentru a studia calitativ salturile granulei de material relativ la mișcarea cadrului mobil. Graficele sunt construite cu ajutorul programului MatLab [1], utilizând algoritme ca cel de mai jos:

```

k1=0.1;
km=0.4;
c=2.65;
a1=0.08;
b1=-0.45;
a2=-0.032;
b2=-0.185;
tauo=23.958;
tau = 0:pi./8:25*pi;
f_z1 = a1*sin(k1*tau/sqrt(1+km))+b1*cos(k1*tau/sqrt(1+km))-k1^2/(1+km-k1^2)*sin(tau)-(1+km)/c;
f_z2 = a2*sin(k1*tau)+b2*cos(k1*tau)-k1^2/(1-k1^2)*sin(tau)-1/c;
f_zr=-k1^2*(tau-taoo).^2/(2*c)+a2*k1*(tau-taoo)*cos(k1*taoo)-b2*k1*(tau-taoo)*sin(k1*taoo)-
k1^2*(tau-taoo)*cos(taoo)/(1-k1^2)-a2*(sin(k1*tau)-sin(k1*taoo))-b2*(cos(k1*tau)-
cos(k1*taoo))+k1^2*(sin(tau)-sin(taoo))/(1-k1^2);
plot (tau,f_z1,'red',tau,f_z2,'green',tau,f_zr,'blue')
save('salturi')

```

Graficele obținute sunt de forma celei din figura 2. În această figură „z1” se referă la ecuația de mișcare a cadrului mobil încărcat cu material iar „z2” se referă la mișcare cadrului mobil fără granula de material. Intersecția lor ne dă punctul de salt al granulei „taoo”. Prin acest punct de intersecție se trasează curba „zs” care descrie mișcarea granulei relativă la cadrul mobil.

Este de subliniat că toate aceste curbe sunt trasate în cazul în care se consideră mișcarea unei singure granule pe suprafața de separare a cadrului mobil.

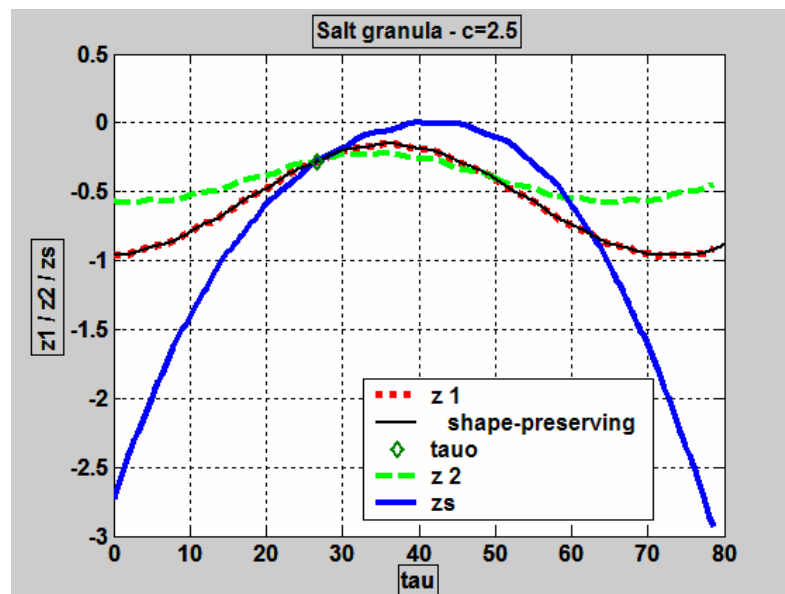


Fig. 2.: Trasarea curbelor „z1” „z2” și „zs” în momentul aruncării granulei de pe sită

Pentru că în realitate pe suprafața de separare se găsește permanent o anumită cantitate de material de cernut putem considera că mișcarea cadrului mobil se face în permanență doar după curba „z1”. De altfel, în activitatea de proiectare la calcularea masei totale în mișcare oscilatorie se consideră că doar 20% din totalul materialului care se află la un moment dat pe sită se găsește în contact permanent cu aceasta. Se pot trasa grafice similare celor trei curbe pentru o variație a coeficientului de aruncare de la $c=2.5$ până la $c=3.3$.

BIBLIOGRAFIE

1. Ghinea, M., Fireteanu, V., *MATLAB, calcul numeric, grafică, aplicații*, Editura Teora, București, 1995.
2. Peicu, R., A., *Studiul vibrațiilor la ciururi în vederea stabilirii unor metode de calcul și proiectare, în scopul îmbunătățirii coeficientului de calitate a cernerii*. Teza de doctorat, Institutul de Construcții București, 1975.
3. Stoicovici, D., I., *Contribuții la optimizarea parametrilor dinamici ai ciururilor vibratoare la sortarea materialelor cu umiditate critică*. Teza de doctorat, Universitatea Tehnică din Cluj-Napoca, 2005.